Investigando en nudos y variedades con la ayuda de Mathematica®

por

María Teresa Lozano

La existencia del ordenador, y en particular de programas que permiten hacer cálculo simbólico y representaciones gráficas, ha dado una nueva orientación a la manera de hacer investigación en matématicas. Es evidente que la potencia, y velocidad de cálculo de los ordenadores permite realizar operaciones que una persona jamás podría concluir, y desde luego eliminan la posibilidad de cometer pequeños errores aleatorios que pueden alterar sustancialmente el resultado. Por esta razón, hoy en día es posible estudiar con detalle muchos ejemplos concretos de una familia de objetos matemáticos que interese investigar. Este estudio de casos particulares indica el tipo de resultados que se pueden esperar en un contexto general. Sin embargo, esto no evita que el investigador tenga que trabajar también en la forma tradicional enunciando y demostrando teoremas. La diferencia está en que ahora tiene a su disposición esta potente herramienta que aumenta su capacidad de cálculo y visualización, y le permite presentar además aplicaciones imposibles de realizar sin su ayuda.

En esta nota trataré de reflejar cómo hemos utilizado el programa Mathematica® en parte de la investigación que he realizado en los últimos años, en colaboración con H. Hilden y J.M. Montesinos.

En primer lugar voy a situar nuestro tema de investigación dentro del panorama de las Matemáticas.

Probablemente los espacios topológicos mas interesantes y con mayor campo de aplicación son las variedades. Una variedad de dimensión n es un espacio topológico localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. El principal problema en el estudio de variedades es su clasificación topológica (a menos de homeomorfismo). Se conoce la clasificacion completa de variedades de dimensión 1 (líneas) y de dimensión 2 (superficies). El problema de la clasificación de variedades de dimensión 3 es hoy en día un activo campo de investigación.

Otro problema importante en topología es la clasificación de encajes de unas variedades en otras, por ejemplo la clasificación de nudos y enlaces, que son encajes de circunferencias en la esfera S^3.

Ambos problemas están relacionados. De hecho algunos de los procedimientos que existen para construir todas las variedades de dimensión 3 orientables y cerradas, involucran nudos y enlaces en S^3, por ejemplo cirugía en un enlace de la esfera S^3, o espacio recubridor de S^3 ramificado sobre un enlace. Estos procedimientos no resuelven todavía el problema de clasificación porque en todos ellos existen repeticiones, es decir distintas cirugías o distintos espacios recubridores pueden dar lugar a una misma variedad.

Para avanzar en la resolución de problemas de clasificación de nudos, enlaces y variedades, se utilizan invariantes. En la investigación de nuevos invariantes se ha de tener siempre en cuenta que son especialmente útiles aquellos invariantes que sean calculables y que tengan suficiente capacidad de distinción. La Topología Algebraica, que surgió de la necesidad de encontrar este tipo de invariantes, proporciona algunos *invariantes algebraicos* interesantes, aunque ninguno de ellos puede distinguir espacios del mismo tipo de homotopía. Recientemente, debido a los trabajos realizados en los últimos veinte años por Thurston y otros geómetras, ha tomado gran importancia la investigación y el cálculo de los llamados *invariantes geométricos*. Estos están asociados a las estructuras hiperbólicas existentes en el complemento de nudos y enlaces (con cierta singularidad en el enlace) y por tanto en las variedades hiperbólicas obtenidas a partir de ellos. Se deduce del Teorema de Rigidez de Mostov, que asegura la unicidad de tales estructuras, que estos *invariantes* son *topológicos*, es decir, son invariantes que distinguen variedades salvo homeomorfismo.

Nosotros hemos utilizado Mathematica®, para investigar y calcular algunos invariantes de este tipo. Hemos utilizado Mathematica® para realizar cálculo simbólico, cálculo numérico, representaciones gráficas en dimensión 2 y 3, y como lenguaje de programación para implementar algoritmos.

Concretamente: Sea K un nudo hiperbólico en la esfera S^3. Eso significa que el exterior del nudo, N_0, es un variedad de dimensión 3 con una única estructura Riemanniana completa de curvatura constante negativa, es decir una variedad hiperbólica. Por tanto su espacio recubridor universal es el espacio hiperbólico H^3, y su grupo fundamental, $G(K)$, que es el grupo del nudo, actua en H^3, como un grupo discreto de isometrías, dando como cociente N_0. Esta estructura corresponde a una representación discreta de $G(K)$ en el grupo de matrices $PSL(2,\mathbb{C})$ isomorfo al grupo de isometrias directas de H^3. Toda representación de $G(K)$ en $PSL(2,\mathbb{C})$, que envíen los meridianos del nudo a giros de ángulo α, para α entre 0 y cierto valor α_h, corresponden a una estructura hiperbólica en S^3 que tiene al nudo como línea singular, puesto que el ángulo alrededor de K mide α en lugar de 2π, como sucede en cualquier línea regular. Esta estructura se denomina variedad cónica y la designamos por (S^3, K_α).

Citaré a continuación, a modo de ejemplo, como hemos utilizado el programa Mathematica® en tres tipos de resultados relativos a estas variedades cónicas.

1.– Las representaciones correspondientes son puntos de una variedad algebraica conocida como *la curva de trazas del nudo*. Utilizando **cálculo simbólico** con Mathematica® hemos **implementado un algoritmo** que, entre otras cosas, calcula un polinomio que define la curva de trazas de cualquier nudo o enlace racional, p/q [1]. El grupo de un enlace o nudo racional tiene una presentación con dos generadores (a,b) y una relación, que se calcula algorítmicamente a partir de los números p y q. Hemos programado una fórmula recursiva basada esencialmente en la siguiente propiedad de las trazas de matrices de $SL(2, \mathbb{C})$:

$$traza(AB) = traza(A)traza(B) - traza(AB^{-1})$$

fórmula que se deduce fácilmente de la conocida ecuación de Hamilton: $A^2 - traza(A)A + I = 0$. Las variables utilizadas en la curva de trazas han sido las siguientes: $x = traza(\rho(a^2))$, $z = traza(\rho(ab))$, donde $\rho : G(K) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es la representación asociada.

La curva de trazas del nudo p/q depende de la presentación del grupo elegida, pero su discriminante, que es un polinomio $h(x)$, es un *invariante polinómico del nudo* fácilmente calculable con Mathematica®. El valor α_h, es una raíz del polinomio $h(x)$, lo que prueba que α_h es un número algebraico, es el llamado límite de hiperbolicidad. El invariante $h(x)$ es un ejemplo de invariante geométrico obtenido usando cálculo simbólico, uno de los aspectos que ofrece el programa Mathematica®. Reproducimos aquí, a modo de ejemplo, la parte (simplificada) del algoritmo que lo calcula.

Datos del nudo

```
p =

q =

n = (p-1)/2;

Table[p-Mod[q*i,2p],{i,1,p-1}];

e = Table[%[[i]]/Abs[%[[i]]],{i,1,p-1}]

t = Table[e[[n-i+1]]*e[[n-i+2]],{i,1,n}]

n = .
```

Fórmula de recurrencia para calcular la curva de trazas

r[0] = 1;

r[1] = (z-1);

r[2] = 1-2*t[[2]]+x-t[[2]]*x-2*z+t[[2]]*z-x*z/2+ t[[2]]*x*z/2+z^2;

r[n_] := r[n] = Expand[(-t[[n]]*r[n-3] + (-t[[n]] + ((1-t[[n]])/2) x + t[[n]] z)*r[n-2] + (-1+z-((1-t[[n]])/2) x)*r[n-1])]

Curva de trazas

n = (p-1)/2;

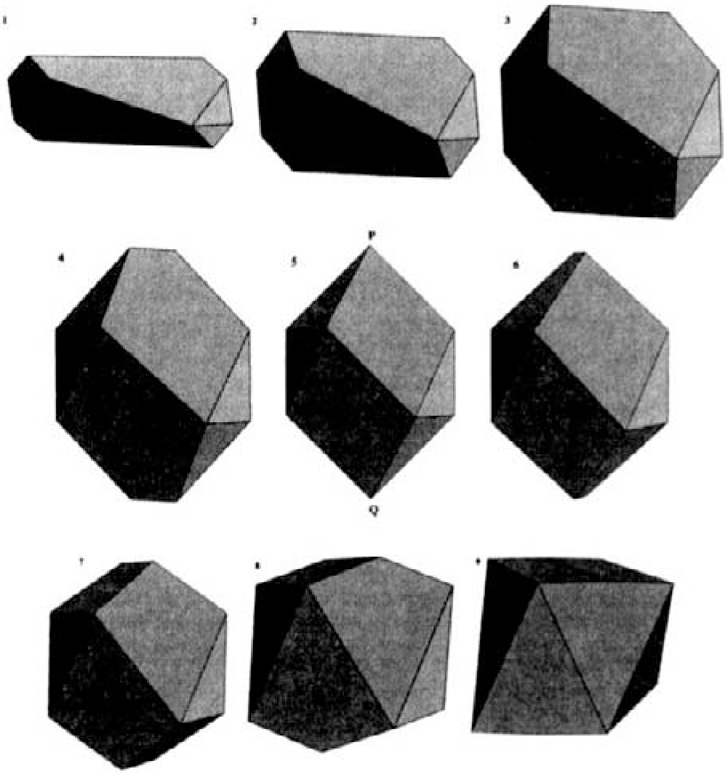
r = r[n]

Factor[r]

h-polinomio

hpol = Factor[Resultant[Expand[D[r],z]], r,z]]

2.- Por otra parte, una variedad hiperbólica cónica se obtiene a partir de un poliedro del espacio hiperbólico H^3, identificando pares de caras mediente isometrías de H^3. Cuando se dispone de una familia de variedades cónicas, dependiente de un parámetro, por ejemplo $\{(S^3, K_\alpha)|\alpha_h > \alpha > 0\}$, la **visualización de los poliedros hiperbólicos** correspondientes a los miembros de la familia permite conocer algunos aspectos interesantes, como su tipo combinatorio, simetrías, situación en los valores límite del parámetro. El estudio realizado en [2] con el nudo racional 5/3, conocido como nudo de Saboya, nudo lasca o nudo "ocho", es un ejemplo de este tipo de investigación. Partiendo del poliedro euclideo para el valor α_h se obtiene los correspondientes a todas las variedades cónicas del nudo de Saboya. Para el valor 0 del ángulo, el tipo combinatorio cambia. En este momento se obtiene un poliedro con dos vértices ideales, P y Q que da la estructura completa en el complemento del nudo. Gracias a este estudio, que podemos calificar como gráfico, observamos que la familia continúa mas allá del ángulo cero. Demostramos entonces con rigor que se produce un fenómeno, denominado cirugía espontánea, tras el que los poliedros corresponden a una nueva familia de varidades hiperbólicas cónicas con soporte la variedad M, obtenida al hacer cirugía cero en el nudo de Saboya, en lugar de S^3.



La figura muestra algunos poliedros de estas familias. Los 5 primeros corresponden a estructuras cónicas en S^3 con singularidad el nudo de Saboya y angulos: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ y cero, los restantes corresponden a estructuras cónicas en la variedad M, con singularidad el ánima de la cirugía, y ángulos: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, y casi 2π. Se observa que en los cuatro primeros se trata de un poliedro con 4 pentágonos y 8 triángulos, en los que las arista superior e inferior (que se proyectan en la singularidad) disminuyen en longitud hasta reducirse cada una de ellas a un punto (P y Q) en el poliedro que ocupa el quinto lugar, que tiene 4 cuadriláteros y 8 triángulos. Es el momento de la cirugía espontánea. Después vuelven a aparecer otras dos aristas en lugar de P y Q, pero como intersección de las otras dos caras, que pasan de triángulos a cuadriláteros. Los últimos cuatro poliedros tienen entonces 8 cuadriláteros y 4 triángulos. Mathematica® permite ver cada poliedro desde cualquier punto de vista [4], o realizar una animación donde se observa la transformación de los poliedros al variar el ángulo.

3.– Dos importantes invariantes geométricos de las variedades hiperbólicas son el volumen y el invariante de Chern-Simons, que se definen también para variedades hiperbólicas cónicas. El volumen de la variedad es el volumen del poliedro hiperbólico del que procede, y el invariante Chern-Simons está relacionado con el giro que se produce en el pegado de las caras. La existencia de fórmulas que relacionan la diferencial de ambos invariantes con funciones continuas asociadas a la singularidad, como son su longitud y giro, permite utilizar **cálculo numérico** para obtener su valor [3].

Estos ejemplos constituyen sólo una pequeña muestra de la enorme cantidad de posibilidades que ofrece Mathematica®. Si algún investigador decide explorar entre sus funciones y paquetes, seguro que en poco tiempo encontrará una utilidad insospechada de este programa en su trabajo.

Bibliografía

[1] HILDEN, H. M., LOZANO, M. T., MONTESINOS-AMILIBIA, J. M.: On the arithmetic 2-bridge knots and link orbifolds and a new knot invariant. *Journal of Knots Theory ands Its Ramifications* **4**, 1995, 81-114.

[2] HILDEN, H. M., LOZANO, M. T., MONTESINOS-AMILIBIA, J. M.: On a remarkable polyhedron geometrizing the Figure Eight knot cone manifolds. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **2**, 1995, 501-561.

[3] HILDEN, H. M., LOZANO, M. T., MONTESINOS-AMILIBIA, J. M.: Volumes and Chern-Simons invariants of cyclic coverings over rational knots. *Topology and Teichmüller spaces*, Sadayoshi KOJIMA et al., World Scientific Pub. Co., 1996, 31-55.

[4] LOZANO, M. T.: *Variedades tridimensionales cónicas: geometría e invariantes* Rev. R. Acad. Ciencias Madrid **LXXXIX**, 1995, 173-181.

María Teresa Lozano, Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza