La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, *alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página[1]) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

En este número...

Para este número de *La Gaceta* hemos solicitado la colaboración del profesor de la Universidad de Sevilla, Pedro Real Jurado, que nos ha enviado un interesante artículo, escrito junto con su alumna Rocío González-Díaz, sobre la simplificación del cálculo de la operación cohomológica denominada *cuadrados de Steenrod.*

El artículo trata de presentar de modo sencillo, a través de algunos cálculos de tipo combinatorio y con un estilo divulgativo, una idea original de González-Díaz-Real (veáse la referencia [2] del artículo anexo) que ha merecido encendidos elogios de varios especialistas en Topología Algebraica (que incluímos a continuación por su acierto descriptivo, aunque respetando el anonimato de los referees), animándonos a requerir de los autores una versión adecuada al tipo de lector de *La Gaceta.*

> ...The subject of the paper [2] is a method giving explicit formulas for the Steenrod squares. The original definitions by Steenrod [4] were not very convenient to study their properties, and it became soon clear that the "abstract" structure properties of these operators are the main problem about the subject. Fifty years later, the subject is still one of the major subjects in Algebraic Topology, and this gives a good idea about the fantastic insight of Steenrod's vision.......the connection established in this paper [2] between the now available formulas for the extended Alexander-Whitney operators and the most ancient definition of the Steenrod squares [4] is quite important. It should become an essential relationship between the theoretical

[1]Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. e-mail: recio@matesco.unican.es

informations known for a long time for the Steenrod operations and concrete works around effective algebraic topology.

...[2] provides an interesting view of the potential of computational methods beyond areas that the computational algebra/algebraic geometry community might traditionally think of ...

...The paper [2] provides an interesting, and potentially promising, fresh approach to computing the action of Steenrod squares in the cohomology of spaces. Until now, making combinatorial computations directly in the chain complexes of simplicial sets has seemed prohibitively complicated in general, but the author's observation about how to simplify by eliminating many degenerate terms should be interesting both to those interested in aspects of computational complexity and feasibility, and to topologists interested in computing the action of the Steenrod algebra on particular spaces.

Una curiosa combinación de Topología, Álgebra y Combinatoria: los cuadrados de Steenrod

por

Rocío González-Díaz y Pedro Real

Un problema de Informática Teórica

Comencemos nuestra exposición con el planteamiento de un problema de contar palabras en el alfabeto $\{0,1\}$ para, más adelante, relacionar este problema con otro de Topología Algebraica.

Por convenio, contaremos las letras de las palabras de izquierda a derecha y supondremos que la letra más a la izquierda es la que ocupa la posición cero.

Consideremos dos números enteros m y n, tales que $0 \leq n < m$ y $n \equiv m \mod 2$ y consideremos $n+1$ enteros $i_0, i_1, \ldots, i_n$ tales que $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1} < i_n \leq m$. El símbolo $(i_0, i_1, \cdots, i_n)_m$ representará a la pareja de palabras de $m+1$ letras del alfabeto $\{0,1\}$ siguientes:

- si n es par, la primera palabra de la pareja es aquella que presenta unos en las posiciones $\{i_0+1, i_0+2, \ldots, i_1-1,\ i_2+1, i_2+2, \ldots i_3-1, \ldots, i_{n-1}-1, i_n+1, \ldots, m\}$ y ceros en el resto, es decir,

$$0\cdots0 \quad \overset{i_0}{0} \quad 1\cdots1 \quad \overset{i_1}{0} \quad 0\cdots0 \quad \overset{i_2}{0} \quad \cdots\cdots \quad \overset{i_n}{0} \quad 1\cdots1 \tag{1}$$

y si n es impar, presenta unos en las posiciones $\{i_0 + 1, i_0 + 2, \ldots, i_1 - 1,\ i_2 + 1, i_2 + 2, \ldots i_3 - 1, \ldots, i_{n-2} - 1, i_{n-1} + 1, \ldots, i_n - 1\}$ y ceros en el resto.

- La segunda palabra de la pareja será aquella de $m + 1$ letras con la propiedad siguiente: si la primera palabra de la pareja presenta un 1 en cierta posición, la nueva palabra tendrá un 0 y viceversa, salvo en las posiciones $i_0, i_1, \ldots, i_n$, donde la nueva palabra tendrá siempre ceros. Por ejemplo, en el caso n par, la nueva palabra sería:

$$1\cdots1 \quad \overset{i_0}{0} \quad 0\cdots0 \quad \overset{i_1}{0} \quad 1\cdots1 \quad \overset{i_2}{0} \quad \cdots\cdots \quad \overset{i_n}{0} \quad 0\cdots0 \tag{2}$$

Es fácil ver que dos símbolos diferentes de la forma $(i_0, \ldots, i_n)_m$ y $(j_0, \ldots, j_n)_m$ dan lugar siempre a parejas de palabras diferentes. Por ejemplo, los símbolos $(1, 2)_3$ y $(2, 3)_3$ representan las parejas $(0000, 1001)$ y $(0000, 1100)$ respectivamente. Otro ejemplo, $(1, 2, 4)_6$ representa la pareja $(0000011, 1001000)$.

A partir de ahora, usaremos la notación

$$(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m = ((i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^+, (i_0, i_1, \ldots, i_n)_m^-)$$

para representar la pareja de palabras que acabamos de describir.

Es claro que el número de unos que aparecen en las palabras de una pareja $(i_0, i_1, \ldots, i_n)_m$ es en total $m - n$, por tanto, para que $(i_0, \ldots, i_n)_m^+$ y $(i_0, \ldots, i_n)_m^-$ tengan el mismo número de unos, éste debe ser $\dfrac{m-n}{2}$. El problema por el cuál nos interesamos es el siguiente: ¿Cuántas parejas $(i_0, \ldots, i_n)_m$ hay con la propiedad de que cada una de sus palabras posea exactamente $\dfrac{m-n}{2}$ unos? ¿Cúal es una manera eficiente de contarlas?

En el caso $n = 1$ y $m = 3$, tenemos las siguientes parejas de palabras

$$\begin{aligned}
(i_0, i_1)_3 &= ((i_0, i_1)_3^+,\ (i_0, i_1)_3^-) \\[1ex]
(0, 1)_3 &= (0000,\ 0011) \\
(0, 2)_3 &= (0100,\ 0001) \\
(0, 3)_3 &= (0110,\ 0000) \\
(1, 2)_3 &= (0000,\ 1001) \\
(1, 3)_3 &= (0010,\ 1000) \\
(2, 3)_3 &= (0000,\ 1100)
\end{aligned}$$

Por tanto, de las 6 parejas posibles, hay dos, la $(0, 2)_3$ y la $(1, 3)_3$, que presentan un sólo 1 en cada una de sus palabras componentes.

La solución al problema general (ver [2]) la da la siguiente serie de desigualdades que, esencialmente, nos proporcionan cotas inferiores para i_k en función de $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$:

$$\begin{aligned} S(n) \ &\leq \ i_n \ \leq \ m \\ S(k) \ &\leq \ i_k \ \leq i_{k+1} - 1, \qquad \forall k = 1, \ldots, n-1 \\ i_0 &= S(0), \end{aligned}$$

donde

$$S(k) = i_{k+1} - i_{k+2} + \cdots + (-1)^{k+n-1} i_n + (-1)^{k+n} \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor,$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

Notemos que estas desigualdades permiten contar exactamente el número de símbolos $(i_0, \ldots, i_n)_m$ que dan parejas de palabras con el mismo número de unos.

Por ejemplo, en el caso $n = 1$ y $m = 3$, las desigualdades anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} 2 \leq i_1 \leq 3 \\ i_0 \ = \ i_1 - 2, \end{aligned} \tag{3}$$

que se corresponden con las soluciones encontradas anteriormente por simple inspección de todos los casos.

ÁLGEBRA Y POLIEDROS

De un problema de Informática Teórica, pasamos a otro completamente distinto, enmarcado dentro de la Topología Algebraica. Comencemos definiendo un tipo particular de conjunto graduado en el conjunto de los enteros no negativos y dotado de dos tipos de operadores que hacen subir o bajar un nivel en la graduación.

Sea $(V, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un conjunto simplicial poliedral P es un conjunto graduado $\{P_q\}$ indexado en los enteros no negativos, tal que

$$P_q \ \subset \ \{< v_0, \ldots, v_q > \in V^{q+1} : v_0 \leq \cdots \leq v_q\},$$

de forma que cualquier proyección de cualquier elemento $< v_0, \ldots, v_q >$ de P_q pertenece a otro conjunto P_r de P. Además, deben existir aplicaciones $\partial_i : P_q \to P_{q-1}$ (operadores cara) y $s_i : P_q \to P_{q+1}$ (operadores de degeneración), $0 \leq i \leq q$, definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \partial_i(< v_0, \ldots, v_q >) \ &= \ < v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q >, \\ s_i(< v_0, \ldots, v_q >) \ &= \ < v_0, \ldots, v_i, v_i, \ldots, v_q >, \end{aligned}$$

donde la notación $\hat{v}$ significa que omitimos el elemento v.

Los elementos de P_q se llaman q-símplices. A los 0-símplices, que se corresponden con los elementos del conjunto V, se les llamará vértices. Un símplice $< v_0, \ldots, v_n >$ se dice que es degenerado si existe un índice i, con $0 \leq i \leq n$, tal que $v_i = v_{i+1}$. En caso contrario, se dice que es no degenerado. Es decir, un símplice es degenerado si pertenece al conjunto imagen de un operador de degeneración de P.

En resumen, un conjunto simplicial poliedral puede considerarse como una versión combinatoria de un poliedro geométrico. La rígida estructura combinatoria que presenta el primero con respecto al segundo estriba esencialmente en el hecho de considerar los operadores de degeneración s_i, aplicaciones, en principio, sin trasfondo geométrico. Estos operadores son fundamentales en Topología Simplicial o Combinatoria para poder definir aplicaciones que partan de conjuntos esencialmente algebraicos y que desemboquen en conjuntos algebro-geométricos. A partir de ahora, para facilitar la lectura, a los conjuntos simpliciales poliedrales los llamaremos, abreviadamente, poliedros.

Supongamos que trabajamos con el anillo de los enteros como conjunto parcialmente ordenado de base. Dado un poliedro P, construyamos la pareja $(C_*(P), d)$ formada por ciertos conjuntos y aplicaciones graduados. Para cada grado q (siendo q un entero no negativo), $C_q(P)$ será el grupo abeliano libre generado por los q-símplices no degenerados de P y $d_q : C_q(P) \to C_{q-1}(P)$ será el homomorfismo $d_q = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\delta_i$. Resaltemos el hecho de que la composición $d_{q-1}d_q$ es el homomorfismo nulo. Esta propiedad nos permite definir el grupo q-ésimo de homología de P como el cociente Ker d_q/Im d_{q+1}.

Análogamente, definiremos la pareja $(C^*(P;\mathbb{Z}_2), \delta)$. En el grado q los elementos de $C^q(P;\mathbb{Z}_2)$, llamados q-cocadenas, serán homomorfismos de $C_q(P)$ en el grupo abeliano aditivo $\mathbb{Z}_2$. Evidentemente una q-cocadena quedará determinada por su acción sobre los q-símplices no degenerados de P. El homomorfismo $\delta^q : C^q(P;\mathbb{Z}_2) \to C^{q+1}(P;\mathbb{Z}_2)$ vendrá definido por $\delta^q(c)(x) = c(d_{q+1}x)$, donde $c \in C^q(P;\mathbb{Z}_2)$ y $x \in C_{q+1}(P)$. El grupo q-ésimo de cohomología $H^q(P;\mathbb{Z}_2)$ será el cociente Ker δ^q/Im δ^{q-1}.

Por no ser esencial en este trabajo, no incidiremos, en lo que sigue, en la estructura diferencial que presentan los grupos graduados $C_*(P)$ y $C^*(P;\mathbb{Z}_2)$ que acabamos de definir.

Establezcamos ahora, con un ejemplo, cierta operación Sq^1 (de la que más adelante destacaremos su importancia) entre cocadenas. Sea c una 2-cocadena de un poliedro cualquiera, P, con un número finito de vértices. En [3] se define la 3-cocadena $Sq^1(c)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Sq^1(c)(t) \;=\; \sum_{i=0}^{4}\sum^{*} \quad & c(\partial_{i+1}\cdots\partial_4 s_{\alpha_{p+1}+m}\cdots s_{\alpha_1+m}\partial_m\cdots\partial_{m+p-1}\,t) \\ & \bullet\, c(\partial_0\cdots\partial_{i-1}s_{\beta_q+m}\cdots s_{\beta_1+m}s_{m-1}\partial_{3-q+1}\cdots\partial_3\,t), \end{aligned} \tag{4}$$

donde $t =< v_0, v_1, v_2, v_3 >$ es un 3-símplice no degenerado, $\bullet$ es el producto en Z_2, $m = 4 - p - q$ y finalmente $\sum^{*}$ es una suma sobre el conjunto de índices

$$\{0 \leq q \leq 2,\ 0 \leq p \leq 3 - q - 1 \text{ y } (\alpha, \beta) \in \{(p+1, q) - \text{barajamientos}\}\}.$$

Nótese que un (p, q)-barajamiento es una partición del conjunto $\{0, 1, \ldots, p+q-1\}$ de enteros en dos subconjuntos disjuntos, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ y $\beta_1 < \cdots < \beta_q$ de p y q enteros, respectivamente. Una partición tal describe una posible forma de mezclar una baraja de p cartas con otra de q cartas, de manera que dispongamos las cartas de la primera baraja en el orden primigenio pero en las posiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ y las de la segunda baraja también en el orden primigenio y en las posiciones $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

Aplicando directamente la fórmula anterior, la 3-cocadena $Sq^1(c)$ al evaluarla en un 3-símplice no degenerado $< v_0, v_1, v_2, v_3 >$, nos devolvería

$$\begin{aligned} Sq^1(c) < v_0, v_1, v_2, v_3 > &= c(< v_0 >) \bullet c(< v_0, v_1, v_2, v_2, v_3 >) + \\ &+ c(< v_0 >) \bullet c(< v_0, v_1, v_1, v_2, v_3 >) + \overset{\text{53 sumandos más}}{\cdots} \end{aligned}$$

Además, en [3] se demuestra que si tenemos una clase de cohomología $[c] \in H^2(P; \mathbb{Z}_2)$ con 2-cocadena representativa c, entonces $[Sq^1(c)]$ pertenece a $H^3(P; \mathbb{Z}_2)$.

UNA VERSIÓN SIMPLIFICADA

Vamos ahora a tener en cuenta varios puntos que nos permitirán reducir considerablemente la complejidad de la fórmula de $Sq^1(c)$. En primer lugar vemos que si aplicamos una q-cocadena a un símplice de distinta dimensión, el resultado es siempre 0. Además, la imagen por c de un 2-símplice degenerado va a ser siempre cero. Por tanto, en la fórmula (4), podemos eliminar todos aquellos sumandos donde aparezcan símplices degenerados y considerar sólo aquellos sumandos $c(\ldots) \bullet c(\ldots)$ donde el número de operadores cara que aparezcan en ambos factores sea 1. Con estas simplificaciones (4) se reduce a una suma con sólo dos términos:

$$\begin{aligned} Sq^1(c)(< v_0, v_1, v_2, v_3 >) &= c(\partial_1(< v_0, v_1, v_2, v_3 >)) \bullet c(\partial_3(< v_0, v_1, v_2, v_3 >)) \\ &+ c(\partial_2(< v_0, v_1, v_2, v_3 >)) \bullet c(\partial_0(< v_0, v_1, v_2, v_3 >)) \\ &= c(< v_0, v_2, v_3 >) \bullet c(< v_0, v_1, v_2 >) \\ &+ c(< v_0, v_1, v_3 >) \bullet c(< v_1, v_2, v_3 >). \end{aligned} \tag{5}$$

Vemos, pues, que la primera definición que hemos dado de $Sq^1(c)$ es susceptible de una mejora sustancial en su complejidad de cálculo.

Asociando composiciones de operadores cara del poliedro con palabras en el alfabeto $\{0, 1\}$, de modo que a la composición $\partial_{k_1} \partial_{k_2} \cdots \partial_{k_j}$ aplicada a un elemento de grado m le corresponda la palabra de longitud $m+1$ siguiente:

$$0 \cdots 0 \ \overset{k_1}{1} \ 0 \cdots 0 \ \overset{k_2}{1} \ 0 \cdots 0 \ \overset{k_3}{1} \ \cdots\cdots \ \overset{k_j}{1} \ 0 \cdots 0 \tag{6}$$

donde $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq m$, vemos que a la pareja (∂_1, ∂_3) del ejemplo anterior se le asociaría la pareja $(0100, 0001)$, que no es más, siguiendo la notación de la sección primera, que $(0,2)_3$ y a la pareja (∂_2, ∂_0) le correspondería el par de palabras $(0010, 1000)$, que constituye la pareja $(1,3)_3$. Así los sumandos de la fórmula (5) quedarían relacionados con las soluciones (3) del ejemplo concreto que trabajábamos en la sección primera. Esta forma de simplificación de la fórmula de Sq^1 constituye una de las piezas clave que nos permitió obtener en [2] fórmulas explícitas para las operaciones (en general) Sq^i, cuya importancia describiremos en la próxima sección.

UNA EXPLICACIÓN MÁS TÉCNICA

Intentaremos aquí engarzar de manera coherente las secciones anteriores, usando como hilo argumental distintos aspectos de carácter técnico e histórico en Topología Algebraica.

Un problema fundamental de la Topología es determinar si dos espacios son o no homeomorfos. Para demostrar que dos espacios **son** homeomorfos hace falta construir una función que vaya de un espacio al otro, biyectiva, continua y con inversa continua. Probar que no lo son es demostrar que tal función no existe, lo que suele ser muy difícil en la práctica. Por ello, se suelen buscar propiedades que sean invariantes por homeomorfismo (*invariantes topológicos*). Por ejemplo, el número de agujeros en un espacio o el número de componentes conexas son invariantes topológicos. Una apropiada generalización de este último concepto es el de grupos de homología. Asimismo, es posible asociar a un espacio topológico X otra serie de grupos abelianos, los llamados *grupos de cohomología*. Estos últimos grupos fueron definidos mucho más tarde que los grupos de homología. La razón no es difícil de comprender, ya que los grupos de cohomología son, geométricamente hablando, mucho menos naturales que los grupos de homología. Sus orígenes están en el Álgebra más que en la Geometría; en un cierto sentido algebraico, ellos representan un concepto "dual" al de los grupos de homología. Es bien sabido que si los grupos de homología fallan para distinguir dos espacios, entonces los grupos de cohomología también fallarán. Entonces, ante la pregunta natural de por qué trabajar con cohomología y no simplemente con homología aparecen varias respuestas. Quizás la más concluyente es que los grupos de cohomología tienen una estructura algebraica adicional -la de anillo- y que este anillo permitirá distinguir espacios cuando los grupos no puedan. La operación de multiplicación en este anillo se denomina *producto cup* y la descripción de su fórmula a nivel de cocadenas dada por Čech y Whitney en los años treinta, produjo una total sorpresa en los topólogos de aquella época. Era bastante sorprendente que la "dualidad" algebraica que presentaban homología y cohomología se rompiera y que el anillo de cohomología apareciera entonces como un invariante más potente que la simple homología para discriminar dos espacios no homeomorfos.

Incluso si nos encontramos con dos espacios con grupos de cohomología isomorfos y con un mismo comportamiento del producto cup en ambos anillos, tal vez la maquinaria de *operaciones cohomológicas*, es decir, de operaciones algebraicas sobre los grupos de cohomología, pueda ayudarnos a distinguir estos dos espacios. El concepto de operación cohomológica apareció con el trabajo de Steenrod [4] en 1947, donde se resuelve el problema de clasificación de aplicaciones de un complejo de dimensión $n+1$ a la esfera S^n, para $n \geq 3$. Que este problema era de considerable complejidad lo evidenciaba el hecho de que dos insignes matemáticos de la época (Freudenthal y Pontrjagin) anunciaran soluciones del mismo que, más tarde, se descubrieron incorrectas. Pero la importancia del artículo de Steenrod estribó fundamentalmente en el hecho de que él introducía, trabajando con complejos simpliciales finitos, una familia de nuevas operaciones Sq^i, llamadas posteriormente *cuadrados de Steenrod*, a nivel de cocadenas. En su trabajo, las descripciones de estas operaciones son extremadamente difíciles de manejar, como ya apuntó el propio Steenrod. En 1949, trabajando con la cohomología de Alexander-Spanier de un espacio, H. Cartan fue capaz de dar una presentación más simple de la construcción de Steenrod. En el Congreso Internacional de Matemáticas de Cambridge de 1950, Steenrod anunció el descubrimiento de nuevas operaciones cohomológicas, las ahora llamadas potencias reducidas de Steenrod. Un hecho esencial para que se produjera este descubrimiento fue la introducción de una nueva definición de los cuadrados de Steenrod, haciendo uso de la definición de Lefschetz de producto cup. En esta definición, la conmutatividad fuertemente homotópica –medida en términos de ciertas aplicaciones D_i ($i \in N \cup \{0\}$) que se definen entre cadenas– del producto cup juega un papel primordial. Pero no fue dada ninguna fórmula explícita general de D_i: Steenrod recurrió a la teoría de modelos acíclicos para garantizar la existencia de estas aplicaciones. En el contexto de la Topología Simplicial, este método puede considerarse, en cierta medida, un proceso constructivo; pero se obtienen así fórmulas extremadamente recursivas para las aplicaciones D_i. Citemos también que Jean Pierre Serre en 1952 estableció una estrechísima relación entre los Sq^i y los grupos de cohomología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane (espacios "primos" en la teoría de homotopía) y, en la misma época, José Adem dio un completo conjunto de relaciones entre los cuadrados de Steenrod. Datos y referencias más explícitas se pueden encontrar en [1].

Tras situar en un contexto histórico la importancia de las operaciones cohomológicas Sq^i que hemos introducido –via ejemplos– en las secciones precedentes, debemos señalar cual es el interés de nuestra aproximación combinatoria a las mismas. En [3] se concreta aún más la definición dada por Steenrod en 1950 de las operaciones Sq^i, en el sentido que se dan, por primera vez, fórmulas no recursivas de las aplicaciones D_i en función de las aplicaciones que intervienen en el Teorema de Eilenberg-Zilber (un resultado de Topología Algebraica donde se garantiza la equivalencia homológica de un producto geométrico de espacios y un producto algebraico). La fórmula (4) es fiel reflejo de este tratamiento. Finalmente, en [2] se obtiene una versión simplificada de la formulación combinatoria de [3]. El modus operandi de esta simplificación lo hemos intentado mostrar en la sección de este artículo que incluye la fórmula (5), si bien no hemos considerado allí que toda composición de operadores caras y degeneración admite una reescritura "canónica", hecho que nos permite establecer, en el caso general de las Sq^i, una elegante fórmula para estas operaciones (ver un nuevo ejemplo más abajo). Grosso modo, el trabajo realizado en [2] se puede considerar como una generalización de la primera definición de los cuadrados de Steenrod en [4] en el contexto combinatorio de la Topología Simplicial.

Veamos un ejemplo de estas fórmulas aplicadas al caso particular de los poliedros. Dado un poliedro P y dada una j-cocadena de $C(P)$, si $i \leq j$ y $j-i$ es impar entonces, dado $t \in C_{i+j}(P)$, la fórmula que obtenemos para Sq^i es:

$$\begin{aligned} Sq^i(c)(t) \;=\; & \sum_{i_n=S(n)}^{m} \; \sum_{i_{n-1}=S(n-1)}^{i_n-1} \cdots \sum_{i_1=S(1)}^{i_2-1} \\ & c\,(\partial_{i_0+1}\cdots\partial_{i_1-1}\partial_{i_2+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-2}-1}\partial_{i_{n-1}+1}\cdots\partial_{i_n-1}\,t) \\ \bullet\;\; & c\,(\partial_0\cdots\partial_{i_0-1}\partial_{i_1+1}\cdots\cdot\partial_{i_{n-1}-1}\partial_{i_n+1}\cdots\partial_m\,t), \end{aligned}$$

donde $i+j=m$ y $j-i=n$.

Nótese que aunque los cuadrados de Steenrod trasforman clases de cohomología en clases de cohomología, en esta descripción –al igual que en la hecha en las secciones 2 y 3 para Sq^1– hemos definido estas operaciones simplemente a nivel de cocadenas. Hemos optado por no incidir en la naturaleza cohomológica de la operación Sq^i para hacer más comprensible la lectura.

Esta fórmula se puede representar, con la notación utilizada en la secciones 1 y 2, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Sq^i(c)(t) \;=\; & \sum_{i_n=S(n)}^{m} \; \sum_{i_{n-1}=S(n-1)}^{i_n-1} \cdots \sum_{i_1=S(1)}^{i_2-1} \\ & c\,((i_0,i_1,\cdots,i_n)_m^+\,t) \bullet c\,((i_0,i_1,\cdots,i_n)_m^-\,t). \end{aligned} \tag{7}$$

donde las secuencias $(i_0,i_1,\cdots,i_n)_m^+$ y $(i_0,i_1,\cdots,i_n)_m^-$ se entienden como una composición de operadores cara, como ya hemos ilustrado en la sección 3. Observemos que las acotaciones de los subíndices son las del problema que planteábamos en la primera sección de este artículo.

Es fácil ver que para una 3-cocadena c la definición (7), para $i=1$ y $j=2$, coincide con la expresión dada en (5).

Observaciones sobre esta nueva formulación

Discutamos algunos hechos sobre la computabilidad de estas fórmulas. Ante todo es claro que si el poliedro con el que estamos trabajando tiene un número finito de símplices no degenerados en cada dimensión, estas fórmulas proporcionan un verdadero algoritmo de cálculo de los cuadrados de Steenrod. En este caso, suponiendo que el número de símplices no degenerados en grado

q es r_q, y dado un entero positivo k, la complejidad del cálculo de Sq^iC_{i+k} será $O(i^{k+1}r_{2i+k})$ y, por tanto, computacionalmente hablando, muy razonable si k es pequeño.

Ahora bien, los ejemplos más interesantes que aparecen en la Topología Algebraica muestran, en general, una complejidad muy alta (exponencial) en el número de símplices no degenerados. En estos casos nuestro algoritmo sólo puede ser eficiente en dimensiones bajas. Aunque quizás combinando apropiadamente nuestro resultado con las propiedades clásicas que verifican los cuadrados de Steenrod esta complejidad podría disminuir.

Desde el punto de vista didáctico vemos que se ha pasado de una definición recursiva, compleja y difícil de comprender, a otra basada en una simple fórmula y que además está relacionada con una "generalización" de las fórmulas del producto cup dadas por Čech y Whitney, ya que mantienen varios (en lugar de uno) vértices comunes entre los dos factores del símplice considerado.

En cualquier caso creemos que estos resultados pueden considerarse como un avance importante en el campo de la Topología Algebraica Computacional. En este trabajo hemos intentado mostrar que no es difícil integrar las herramientas del Álgebra Computacional con las herramientas clásicas de Topología. La implementación eficiente de las fórmulas explícitas (7) en el contexto de conjuntos simpliciales poliedrales y clasificantes de grupos constituye uno de nuestros principales objetivos a corto plazo.

Bibliografía

[1] DIEUDONNÉ, J.: *A history of Algebraic and Differential Topology 1990-1960.* Birkhäuser, Boston, 1989.

[2] GONZÁLEZ-DÍAZ, R., REAL, P.: *A combinatorial method for computing Steenrod Squares.* Aparecerá en un volumen especial del Journal of Pure and Applied Algebra (en Junio de 1999).

[3] REAL, P.: *On the computability of the Steenrod squares.* Annali de'll Università di Ferrara, sezione VII. Scienze Matematiche, **v. XLII**, (1996) 57-63.

[4] STEENROD, N.E.: "Products of cocycles and extensions of mappings". *Annals of Math.* **48** (1947) 290-320.

Rocío González-Díaz y Pedro Real
Dpto. de Matemática Aplicada I. Facultad de Informática y Estadística.
Universidad de Sevilla
e-mail:`rogodi@euler.fie.us.es, real@cica.es`