EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo

Quizás influido por mi experiencia personal, pienso que los buenos divertimentos matemáticos pueden ser una fuente de inspiración tanto de futuros artistas como de nuevas disciplinas y aplicaciones interesantes de las matemáticas. En esta sección trataremos de sacar partido a ese aspecto lúdico de las matemáticas, pero intentaremos evitar que se convierta en una sección de meros pasatiempos, poniendo siempre énfasis en las conexiones con otras áreas.

El título de un libro sorprendente, "El diablo de los números" (Editorial Siruela) da nombre a esta sección. Aunque nosotros nos debemos mover en otros registros no renunciaremos a ese lado amable de las matemáticas que tan magistralmente Hans Magnus Enzensberger refleja en su libro.

Espero que en estas páginas seamos capaces de reconocer a ese "diablo de los números" que todos llevamos dentro.

Confiamos en que esta sección se mantenga con las aportaciones de todos vosotros. Artículos monográficos, respuestas a los diferentes problemas, observaciones, problemas interesantes, etc., pueden ser enviados a la dirección:

`franciscojavier.cilleruelo@uam.es`

CUADRADOS MÁGICOS

Un juego popular de adivinación consiste en pedir que se seleccionen en secreto 4 números de distintas filas y columnas entre los 16 números del cuadrado inferior y adivinar su suma.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Quien no conozca este juego puede comprobar que, efectivamente, la suma de 4 números elegidos de esta manera siempre es la misma.

¿Puede adivinar el lector el porqué de esta curiosa propiedad? ¿Qué ocurre cuando se seleccionan n números por el mismo procedimiento en el cuadrado de $n \times n$? ¿Cuánto vale su suma?

Volvamos a nuestro cuadrado de 4×4. Hay algunas transformaciones en el cuadrado, como por ejemplo permutaciones de filas o columnas y giros, que dan lugar a otros cuadrados de las mismas características.

¿Sabrías calcular cuántos cuadrados de 4×4 conteniendo los 16 primeros enteros positivos tienen esa propiedad? (Hay más de los que parece a primera vista).

Contabilizar los cuadrados de $n \times n$ con estas propiedades parece un problema muy difícil. ¿Se atreve alguien a intentarlo?.

Aunque estos cuadrados presentan propiedades mágicas, por cuadrados mágicos entendemos otra cosa.

Definición 1 *Un cuadrado mágico de orden n es un conjunto de n^2 números dispuestos en un cuadrado de $n \times n$ de tal manera que la suma de todos los números pertenecientes a una fila, columna o diagonal principal, sumen lo mismo.*

Esta definición general admite toda clase de números, sin restricciones.

Más adelante nos interesaremos por cuadrados mágicos donde todos los números son enteros positivos y distintos. El más sencillo de estas características es el siguiente cuadrado de orden 3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La operación suma de dos cuadrados mágicos y la multiplicación por un escalar dotan a los cuadrados mágicos de estructura de espacio vectorial.

No es difícil comprobar que los cuadrados

1	1	1
1	1	1
1	1	1

0	-1	1
1	0	-1
-1	1	0

-1	1	0
1	0	-1
0	-1	1

forman una base para los cuadrados mágicos de orden 3, y que todas las posibles combinaciones representan todos los diferentes cuadrados mágicos de orden 3.

$a-c$	$a-b+c$	$a+b$
$a+b+c$	a	$a-b-c$
$a-b$	$a+b-c$	$a+c$

¿Podríais encontrar una base para los cuadrados de orden 4? ¿Y, en general, cuál es la dimensión del espacio vectorial de los de orden n?

Obsérvese que en cualquier cuadrado mágico de orden 3 la suma que caracteriza al cuadrado, su constante mágica, es tres veces el número central.

CUADRADOS MÁGICOS DE NÚMEROS PRIMOS

Entre todos los cuadrados de orden 3, los constituidos por números primos siempre han despertado un interés especial. Hace unos años se demostró que existen infinitos cuadrados de esta clase. Sin embargo el encontrarlos no es tarea fácil.

Se necesita más astucia que fuerza, aunque también se necesita de esta última. En el siguiente número publicaremos los cuadrados de primos con menor y mayor constante mágica entre los que nos enviéis.

El cuadrado de la derecha, por ejemplo, está formado por primos que acaban en 1.

No he conseguido ningún cuadrado mágico de orden 4 formado por números primos. ¿Podeis encontrar alguno?

151	811	301
571	421	271
541	31	691

CUADRADOS MÁGICOS DE CUADRADOS PERFECTOS

Exigir que todos los términos de un cuadrado mágico sean cuadrados es una restricción muy fuerte que implica ecuaciones diofánticas simultáneas de grado 2. De esta clase de cuadrados se conoce la existencia de infinitos de orden 4, pero no se ha encontrado ninguno de orden superior. ¿Qué ocurre con los de orden 3?

627^2	744^2	1224^2	388^2
1284^2	8^2	933^2	276^2
712^2	1236^2	444^2	603^2
216^2	717^2	172^2	1416^2

Un problema clásico, todavía sin resolver, relacionado con este tipo de ecuaciones simultáneas de grado dos consiste en encontrar, o demostrar que no existe, un paralelepípedo rectangular cuyos lados, diagonales laterales y diagonales principales sean números enteros.

CUADRADOS MÁGICOS DE ENTEROS CONSECUTIVOS

Es particularmente llamativo el contemplar cuadrados mágicos de orden n formado por los n^2 primeros enteros positivos.

Aunque es un pasatiempo sencillo construir el cuadrado de orden 3, el de orden 4 ya resulta más difícil construirlo sin un método razonable. Pero antes de intentarlo propongo el siguiente problema:

Problema 1 *Disponer los ases, reyes, caballos y sotas de la baraja española en un cuadrado de tal manera que cada fila, cada columna y cada diagonal principal contenga 4 figuras diferentes y de distintos palos.*

Quien haya conseguido resolver el problema no tendrá dificultad en construir el cuadrado mágico de orden 4.

Utilizando estas ideas he conseguido una fórmula general para construir cuadrados mágicos de orden $n \times n$ con los n^2 primeros enteros positivos cuando n es impar. La fórmula consiste en colocar en el lugar (i, j) el número

$$n\left(\frac{n-1}{2}+j-i\right)_n+\left(\frac{n+1}{2}-i-j\right)_n+1,$$

donde $(\quad)_n$ indica el resto módulo n. ¿Podéis demostrar que la fórmula representa un cuadrado mágico de orden n? Por ejemplo tenemos los de de orden 3, 5 y 7.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

24	30	36	49	6	12	18
16	22	35	41	47	4	10
8	21	27	33	39	45	2
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	42
40	46	3	9	15	28	34
32	38	44	1	14	20	26

¿Alguien nos puede ilustrar con algún procedimiento general para construir cuadrados mágicos de orden par?

Euler, uno de los más grandes matemáticos de la historia, propuso el siguiente problema: cada uno de los seis regimientos tiene seis oficiales, uno de cada cual pertenece a cada uno de los seis rangos diferentes. ¿Se pueden disponer los 36 oficiales en un cuadrado de tal manera que en cada fila y en cada columna haya un oficial de cada regimiento y de cada rango?

Gastón Tarry, en 1901, dió una respuesta negativa a este problema.

Euler había demostrado que el problema de los n^2 oficiales puede ser resuelto si n es impar o múltiplo de 4 y conjeturó que solamente en estos casos. Sin embargo, 180 años después de Euler, Parker encontró una solución al problema para $n = 10$ y más tarde se demostró que el problema tiene solución para todo entero positivo $n \neq 2, 6$.

CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS

Una variante natural de los cuadrados mágicos consiste en considerar cuadrados tales que los números de una fila, columna o diagonal tengan el mismo producto.

El más sencillo que he encontrado con enteros positivos distintos es el cuadrado que aparece a continuación.

6	36	8
16	12	9
18	4	24

Obsérvese que el producto, término a término, de dos cuadrados mágicos multiplicativos es también un cuadrado mágico multiplicativo, y que los exponentes de cada primo p en un cuadrado de éstos forman a su vez un cuadrado mágico normal.

¿Puede demostrar el lector que el producto que caracteriza a un cuadrado mágico multiplicativo, su constante mágica, es el cubo del número central?

Como 1998 es el año en curso, le he querido dedicar un cuadrado mágico multiplicativo con dicho número en la posición central.

54	110889	324
1369	1998	2916
2997	36	73726

Sin embargo no es el único. ¿Podéis encontrar los restantes esencialmente distintos?

Otra cuestión que nos ha surgido estudiando estos cuadrados ha sido el poder conseguir cuadrados multiplicativos donde todos los términos estén próximos al central.

He conseguido demostrar que en un cuadrado mágico multiplicativo alguno de los términos tiene que estar a una distancia del central superior a $c^{3/4}$, donde c es el término central. ¿Podéis demostrar o incluso mejorar esta estimación?