Matemáticas y Física: encuentros y desencuentros

por

Enrique Álvarez

INTRODUCCIÓN

Existe un artículo justamente famoso del físico E. Wigner, titulado *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*[1].

En él se subraya que *the enormous uselfulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it*[2].

Naturalmente hay dos sentidos en los que esto es cierto. Uno de ellos, el más trivial, es el de la matemática como herramienta para extraer conclusiones y efectuar predicciones a partir de teorías ya conocidas; lo que los británicos llaman *matemática aplicada*. Lo más importante, sin embargo, (como ya señaló Galileo) es que las leyes de la Física, ellas mismas, están ya formuladas en lenguaje matemático.

No es éste el lugar para cantar las alabanzas de la ciencia positiva, que es una de las bases de la civilización contemporánea. Su estrategia para analizar la naturaleza, basada en la selección de unos pocos fenómenos relevantes, dependientes de ciertas condiciones iniciales o de contorno, manipulables en los laboratorios, y en la contrastación de las predicciones de los modelos con los datos experimentales, ha sido extraordinariamente exitosa, especialmente en el marco de las ciencias físicas.

Pocos científicos cuestionarían lo que Wigner, un tanto pomposamente, llama la *empirical law of epistemology*[3] (al menos en el marco de las ciencias físicas), a saber, la adecuación de las matemáticas como lenguaje en el que se expresan las leyes científicas.

Siempre es conveniente, sin embargo, adquirir un poco de perspectiva, y admitir que no estamos seguros de que este tipo de descripción de la naturaleza sea la única apropiada. En palabras atribuidas a F. Werner por el propio Wigner, *...we make a rather narrow selection when choosing the data on which we test our theories. "How do we know that, if we made a theory which focuses its attention on phenomena we disregard and disregards some of the phenomena*

[1]Podríamos traducir el título por *La poco razonable eficacia de las matemáticas en las ciencias físicas*. Se trata de la *Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences* impartida en la Universidad de Nueva York el 11 de Mayo de 1959, y publicada en Communications in Pure and Applied Mathematics, 13 (1960).

[2]Traducción libre: la enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que bordea lo misterioso y no existe una explicación racional para ello.

[3]La ley empírica de la epistemología.

now commanding our attention, that we could not build another theory which has little in common with the present one, but which, nevertheless, explains just as many phenomena as the present theory?". It has to be admitted that we have no definite evidence that there is no such theory [4].

Encuentros

Desde el principio de la ciencia positiva moderna (ya desde los griegos, mucho antes de que Newton sentase las bases de la Física Clásica) es un lugar común el decir que Física y Matemáticas (aunque existen como disciplinas independientes) caminan al principio bastante unidas; y la eminencia simultánea en las dos disciplinas no era en modo alguno excepcional. El propio Newton descubrió el cálculo infinitesimal (fluxiones) como instrumento para sus computaciones en gravitación.

El descubrimiento del análisis de Fourier, y en general, el estudio de las llamadas *ecuaciones diferenciales de la física matemática* (resumidas en el famoso manual de Whittaker y Watson) representa una fracción importante de las matemáticas del pasado siglo.

Hay incluso disciplinas, como la *Mecánica Analítica*, desarrolladas en gran medida por personas que se consideraban a sí mismos esencialmente matemáticos: empezando por la mecánica lagrangiana de Laplace y Lagrange, para continuar con el formalismo hamiltoniano de Hamilton y Jacobi, o con los problemas variacionales ligados al principio de mínima acción (cuyo origen se remonta, de hecho, al propio Fermat), y finalizando con la teoría de sistemas dinámicos, de la que fueron pioneros Poincaré, Hadamard y Kolmogorov.

Las dos grandes revoluciones en la física del siglo XX, a saber, la Mecánica Cuántica y la Relatividad, también han tenido interesantes contactos y encuentros con las matemáticas.

En el primer caso, la constatación de que las fórmulas de Heisenberg admitían una implementación en términos de matrices condujo, por una parte a la formalización de los observables en términos de operadores definidos en un espacio de Hilbert (cf. von Neumann y sus *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, aparecidos en 1932), así como a la concreción por L. Schwartz con su *Théorie des distributions* en 1950 (basándose en trabajos previos sobre *funciones generalizadas* por la escuela rusa de Sobolev alrededor de 1936) de ideas adelantadas por Dirac desde un punto de vista físico ya en 1920

[4]...efectuamos una selección bastante corta cuando escogemos los datos sobre los que verificar nuestras teorías. "¿Cómo sabemos que, si construímos una teoría que centre su atención sobre fenómenos que nosotros despreciamos, y desprecie algunos de los fenómenos que ahora mismo más nos llaman la atención, no podemos construir otra teoría que tenga poco en común con la presente, pero que, sin embargo, explique tantos fenómenos como la teoría actual?" Hay que admitir que no tenemos una evidencia definitiva de que no existe una tal teoría.

(aunque los conceptos fundamentales habían sido ya sugeridos, entre otros, por Heaviside).

En el caso de la Relatividad Especial, fueron dos matemáticos los verdaderos pioneros: Poincaré (siguiendo a Lorentz) demostró que las Ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo el grupo de Galileo, y determinó exactamente su grupo de invariancia; en tanto que fue Minkowski el primero que presentó una interpretación natural de la teoría física en términos familiares a la comunidad matemática (el grupo de Lorentz como grupo de isometrías de una métrica pseudoeuclídea).

Finalmente, las profundas ideas de Einstein sobre gravitación fructificaron entre los años 1912 a 1915 (gracias, entre otras cosas, a la colaboración con el matemático Marcel Grossmann), usando conceptos elaborados poco antes por la escuela italiana de Ricci y Levi-Cività y que desarrollaban, naturalmente, las seminales ideas de Riemann. De hecho, el concepto de derivada covariante no fue formulado de manera precisa hasta 1917 (por el propio Levi-Cività); y la conexión lineal no fue introducida por Hermann Weyl hasta 1919.

Todavía más importante es el hecho de que la propia idea de una *teoría gauge* esto es, insensible a las redefiniciones arbitrarias de las fases en cada punto del espacio-tiempo (que, como es bien sabido, constituye el fundamento de la comprensión actual de la interacciones fundamentales de la naturaleza (electromagnéticas, fuertes y débiles) como una *teoría gauge* basada en el álgebra de Lie $g = su(2) \oplus u(1)_{hipercarga} \oplus su(3)_{color}$) es debida al matemático Hermann Weyl (en 1918) quien desarrolló primero el concepto en el contexto del electromagnetismo clásico; pero que más tarde introdujo, en un magnífico artículo publicado en 1929[5] algunos aspectos de la invariancia gauge de la teoría relativista de la gravitación de Einstein, utilizando de paso por primera vez el formalismo de lo que hoy llamaríamos los *vierbeins*.

En uno de los ejemplos más notables de pensamiento convergente, los físicos Yang-Mills (y casi simultáneamente, Shaw y Utiyama), formularon la invariancia gauge general en los años 1953 y 1954 ignorando los trabajos de Weyl. Mientras tanto, los matemáticos trabajando en geometría diferencial (Cartan, de Rham, Whitney, Hodge, Chern, Steenrod, Ehresmann, etc.) fueron refinando los conceptos de la teoría, hasta culminar en la definición de *fibrado* a principios de los 50. No fue hasta 20 años más tarde que el propio Yang, en colaboración con T.T. Wu, se dio cuenta de que tanto las teorías de Yang-Mills por una parte, como la formulacion de Weyl de la relatividad general por otra, son dos aspectos distintos del mismo concepto matemático de conexión.

Curiosamente, y a pesar de coincidir tanto Yang como Weyl en el I.A.S. de Princeton durante varios años, no parecen haber hablado del tema. En

[5] Y reproducido en traducción inglesa como *Electron and Gravitation* en el reciente libro de Lochlainn O'Raifeartaigh *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton University Press, 1997).

palabras del propio Yang[6] *I had met Weyl in 1949 when I went to the IAS as a young 'member'. I saw him from time to time in the next years, 1949-55. He was very approachable, but I do not remember having discussed physics or mathematics with him at any time.... had Weyl somehow come accross our paper, I imagine that he would have been pleased and excited, for we had put together two things that were close to his heart: gauge invariance and non-abelian Lie groups*[7].

DESENCUENTROS

Siempre ha habido, sin embargo, *matemáticos puros*, que defendían la existencia y el derecho (si no la superioridad) de la investigación matemática ausente de toda motivación física. Un ejemplo interesante es el de la teoría de números, a la que numerosos matemáticos, desde Diofanto de Alejandría hasta André Weil, pasando por Gauss, Fermat, Legendre, Euler, etc, han dedicado parte de su tiempo.

Una muestra extrema de esta tendencia, recogida por el famoso matemático Bourbakista Jean Dieudonné en su libro publicado en 1987 y titulado precisamente *Pour l'honneur de l'esprit humain*[8] es este párrafo de una carta (en francés) de Jacobi a Legendre, de 1830: ...*M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phenomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde...*[9]

Creo que es justo decir, sin embargo, que la exclusividad en esa dedicación, aunque existía ocasionalmente, no era en modo alguno frecuente.

Esta tendencia se quebró, sin embargo, a mediados del presente siglo, con el enorme avance de la abstracción en la matemática moderna; que podemos caracterizar hasta cierto punto a partir de la concentración en el estudio de las estructuras abstractas. Las categorías fueron introducidas por Eilenberg y MacLane en 1945, y los trabajos seminales de Groethendiek en Geometría Algebraica no tardaron mucho.

---

[6] En C. N. Yang.-*Hermann Weyl's contribution to physics*, in Hermann Weyl, ed. K. Chandrasekharan, (Springer Verlag, 1980)

[7] Coincidí con Weyl en 1949 cuando fui, al IAS como un "miembro" joven. Le vi de vez en cuando durante los años siguientes, 1949-55. Era un hombre agradable, pero no recuerdo haber hablado de física o matemáticas con él nunca.... si Weyl hubiese leído nuestro artículo, le habría agradado y conmovido, ya que nosotros juntamos dos cosas próximas a su corazón: invariancia gauge y grupos de Lie no abelianos.

[8] Para el honor del espíritu humano.

[9] ...El Sr. Fourier era de la opinión de que el propósito principal de las matemáticas era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería de saber que el objetivo único de la ciencia es el honor del espíritu humano, y que, bajo ese título, una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo...

No es éste el lugar para evaluar la influencia del grupo Bourbaki (entre cuyos fundadores se contaban Henri Cartan, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, André Weil, etc) en la matemática contemporánea. Desde luego fue inmensa en Francia, y es evidente que entre sus rasgos distintivos no se encontraba un particular interés en el tipo de matemáticas motivadas por las ciencias positivas.

Curiosamente, existe una actitud bastante numerosa entre los físicos teóricos, que es, en cierto sentido, simétrica de la anterior, y que consiste en despreciar las matemáticas como disciplina, argumentando que, en caso necesario, los físicos redescubrirán todo lo que sea necesario para formular sus teorías.

Baste, como muestra, la siguiente cita del famoso físico Sheldon Glashow[10]: *Here, the reader will find no narcissistic cry of mathematics for mathematics' sake. To the contrary, we physicist-chauvinistic-pigs regard mathematics as the mare (sic) handmaiden of physics. Flights of mathematical fancy are tolerated only insofar as they are thethered to observable physical phenomena*[11].

BALANCE Y PERSPECTIVAS

Una de las características de la física teórica actual es su carácter especulativo. Ello es, irónicamente, hasta cierto punto una consecuencia del inmenso éxito del llamado *modelo standard* de las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes, que, como decíamos más arriba, unifica las interacciones fundamentales en una teoría gauge no abeliana, caracterizada por un grupo de rango cuatro, tal que las representaciones físicamente implementadas son compatibles con la estructura global de $SU(3) \times S(U(2) \times U(1))/\mathbf{Z}_2$.

Esta unificación es sólo parcial, en el sentido de que el grupo en cuestión no es simple, lo que quiere decir que hay básicamente tres constantes de acoplo independientes (una por cada factor en la descomposición semisimple).

Otro aspecto insatisfactorio es que la cuarta interacción fundamental, esto es, la Gravitación, descrita satisfactoriamente por la Relatividad General de Einstein a nivel clásico, no admite una descripción cuántica conocida que no sea demasiado singular a cortas distancias.

Es de resaltar que, hasta cierto punto, y a diferencia de lo que ocurría en las grandes *crisis históricas*, los problemas anteriores son teóricos (alguien podría decir, estéticos); no existe ningún dato experimental conocido que esté en desacuerdo con la teoría.

---

[10] Tomada del prólogo al libro *Lie Algebras in Particle Physics*, de Howard Georgi (Benjamin, 1982).

[11] Aquí, el lector no encontrará excesos narcisistas de las matemáticas por sí mismas. Por el contrario, nosotros físicos-cerdos-chauvinistas miramos las matemáticas como la criada de la física. Vuelos de fantasía matemática son tolerados sólo en la medida en que estén relacionados con fenómenos físicos.

Es posible que la actitud más razonable en estas circunstancias fuera la de esperar hasta que los datos empíricos indiquen el camino a seguir, pero no es ésta la actitud que ha tomado la corriente dominante en la física teórica, por todo tipo de razones[12].

Basándose en el indudable éxito empírico de la unificación (parcial) de las teorías electrodébiles y fuertes arriba mencionada, resultaba casi inevitable el postular que ese mismo principio se generalizaba, a energías todavía más grandes (lo cual, por el principio de incertidumbre de Heisenberg equivale a explorar distancias correspondientemente más pequeñas) a una unificación de estas interacciones con las llamadas fuertes en una teoría gauge con un grupo simple. Este paso fue dado por los físicos americanos Georgi y Glashow (aunque ideas parecidas habían sido formuladas previamente por Pati y Salam).

Diferentes tipos de problemas teóricos relacionados con detalles de los modelos, llevaron a postular supersimetría (esto es, igualdad del número de grados de libertad bosónicos con el correspondiente número de grados de libertad fermiónicos), lo cual hace más natural la elección de parámetros necesaria en los modelos para que sean compatibles con el experimento. Los primeros modelos con estas propiedades fueron construidos por Wess y Zumino, aunque Volkov y Akulov y Golfand y Likhmann, así como Pierre Ramond en sus pioneros trabajos en cuerdas ya se habían encontrado con manifestaciones primitivas de esta misma simetría.

El hecho de que la gravedad esté ausente de esta unificación es algo que puede parecer poco natural. Resulta irresistible la tentación de examinar la posibilidad de que la gravitación sea una interacción como las otras, descrita por una teoría gauge del mismo estilo que las que describen las demás interacciones fundamentales.

En este sentido supersimetría presenta una extensión natural. Tal y como demostraron en un trabajo clásico, Haag, Lopuszanski y Sohnius, la simetría más grande que puede tener la matriz S (que caracteriza completamente los fenómenos de dispersión tal y como se observan en los aceleradores) es un álgebra de Lie graduada, (donde la gradación viene dada básicamente por el número fermiónico), y que es precisamente supersimetría.

Su característica esencial es que el anticonmutador de dos cargas supersimétricas es precisamente una traslación espacio-temporal. Ahora bien, la Relatividad General es, en un cierto sentido, invariante bajo difeomorfismos arbitrarios; y también en un cierto sentido, se puede considerar que los difeomorfismos arbitrarios, son las traslaciones locales (es decir, arbitrarias en cada punto). Es decir, que en el mismo sentido que decimos que el electromag-

[12]Un fenómeno sociológicamente muy importante es el del dominio aplastante de la escuela americana desde la implantación del *web*. En esta disciplina concreta, en la que además desde hace más de veinte años todos los experimentos importantes se realizan en el laboratorio europeo del CERN en Ginebra, este fenómeno se ha acentuado más aún desde la desmembración de una parte importante del aparato científico de la URSS.

netismo aparece cuando se demanda la independencia de la física respecto de las elecciones arbitrarias de fase de los fermiones, efectuadas de forma independiente en cada punto, podemos decir que la Relatividad General aparece cuando se postula independencia de la física respecto de traslaciones arbitrarias en cada punto; es realmente, la teoría gauge de las traslaciones. Ahora bien, por supersimetría, ello es equivalente a demandar supersimetría local, esto es, independientemente en cada punto del espacio tiempo. Resulta entonces natural que la teoría gauge de la supersimetría contenga la gravitación de Einstein como una subteoría. A estas nuevas teorías se las llama *supergravedades*, y son extraordinariamente interesantes. Fueron construidas por primera vez por Freedman, van Nieuwenhuizen y Ferrara, así como por Deser y Zumino.

Aunque la estructura de estas teorías a cortas distancias es mucho menos singular que la gravitación de Einstein, no es lo suficientemente regular como para extraer de ella predicciones inambiguas.

En esta misma línea de pensamiento surge entonces la idea de *supergravedad de Kaluza-Klein*, esto es, supergravedad con dimensiones adicionales (supuestas tan pequeñas que, para poderlas observar serían necesarias, por el principio de incertidumbre de Heisemberg, energías muy superiores a las previsiblemente alcanzables en los aceleradores), y finalmente *supercuerdas*; teorías en las que los ingredientes fundamentales ya no son puntuales, sino objetos unidimensionales, viviendo en espacios con dimensiones adicionales, y también con coordenadas fermiónicas.

La historia de las cuerdas es bastante pintoresca, por demás, ya que fueron inventadas a principios de los 70 como un modelo de las interacciones fuertes, (siendo probablemente Nambu el primero que las formuló explícitamente) de forma que la escala de energía asociada era la masa del pión; siendo a los pocos años reinterpretadas por Scherk y Schwarz como teorías cuánticas de la gravitación. Dado ese "pintoresquismo", decimos, el punto de vista con el que se aborda su estudio es continuamente cambiante (a esos cambios súbitos de punto de vista se les llama "revoluciones" por los entusiastas).

El físico americano Edward Witten ha dicho repetidamente que, por una serie de circunstancias afortunadas, hemos tenido la suerte de vislumbrar un rincón de la "física del siglo XXI", y tenemos que tratar de explorarlo con nuestras torpes técnicas y nuestros conceptos primitivos.

Es posible que sea así. Pero aunque no lo fuera, no es menos cierto que el estudio de las cuerdas ha proporcionado visiones radicalmente renovadoras, y ha relacionado problemas en campos tan dispares como las teorías gauge fuertemente acopladas, las supergravedades en diferentes dimensiones, la teoría de superficies de Riemann, las membranas "embebidas" en espacios superiores, la geometría algebraica y la dualidad eléctrica/magnética, por no hablar de las profundas revisiones a las que ha obligado a someter el concepto de espacio-tiempo como estructura probablemente no conmutativa; o la posibilidad misma de que la distinción entre mundo clásico/mundo cuántico no sea "absoluta" sino "relativa" (dependiente de los detalles de la compactificación del espacio cuadridimensional ordinario en la teoría fundamental, que hoy se piensa que está definida en once dimensiones).

Resulta interesante plantearse si nuestra falta de comprensión de los principios básicos de la teoría de cuerdas puede venir de *falta de técnica matemática*, o bien, se debe a la total ausencia de información experimental sobre esas distancias tan extremadamente pequeñas.

En todo caso es evidente que en la física teórica se están planteando por primera vez de forma sistemática una serie de problemas que enlazan con corrientes contemporáneas en las matemáticas. Uno de ellos es, sin duda, el de la estructura del espacio-tiempo a cortas distancias. Si los componentes básicos de la naturaleza son cuerdas, parece claro que existe una longitud mínima tal que es imposible *medir* distancias más pequeñas. Recientes descubrimientos de ciertos *defectos topológicos* presentes necesariamente en las cuerdas (conocidos genéricamente como *branas*) indican, incluso que quizás el espacio-tiempo no es básicamente una estructura diferenciable, y que sería descrito de forma más apropiada por técnicas de la Geometría no conmutativa de Alain Connes.

El propio Connes ha hecho un enorme esfuerzo por leer (sin innecesarias modestias) el grupo de simetría (o más bien, la estructura no conmutativa del espacio-tiempo) de la naturaleza a partir del *modelo standard*, de la misma manera que Lorentz y Poincaré leyeron el grupo de Lorentz de las ecuaciones de Maxwell.

Un papel muy importante en las relaciones recientes entre física teórica y disciplinas tales como teorías topológicas, invariantes de Donaldson, invariantes de Jones, extensiones de la teoría de Morse, etc., lo ha desempeñado Michael Atiyah (muchas veces, con la colaboración de Witten). La influencia de ambos en esta *tierra de nadie* situada entre las dos disciplinas ha sido inmensa, culminando a nivel sociológico con la medalla Fields otorgada a Witten (que se considera a sí mismo como un físico).

Una de las cuestiones más irónicas de todo el proceso que acabamos de resumir es que la rama de la matemática tradicionalmente considerada como más *pura*; esto es, la teoría de números aparece de manera natural, relacionada con la teoría de superficies de Riemann, etc, en la *física* de cuerdas.

Desgraciadamente todavía no conocemos el lenguaje más natural (presumiblemente relacionado con sus simetrías fundamentales) en el que escribir estas teorías, por lo que todavía no se sabe hasta qué punto son esenciales estas estructuras en su descripción.

Pero no deja de ser irónico este *giro pitagórico* en la física, al menos desde el punto de vista de los matemáticos puros.

No existe consenso en la comunidad física sobre el significado profundo de estas últimas tendencias. La opinión oscila entre un total desprecio de este tipo de investigación (caso de Glashow, en la línea de la cita reproducida más arriba), o bien un entusiasmo ilimitado presumiblemente precursor de una profunda revolución en nuestra manera de entender el espacio-tiempo (caso de Witten). Posturas más moderadas tienen otros físicos teóricos eminentes, como Hooft o Polyakov.

Aunque no existe precedente en este siglo de que la corriente de opinión mayoritaria en física de partículas haya estado equivocada, no es menos cierto que nunca se habían alcanzado, ni remotamente, los niveles de abstracción y de lejanía respecto del experimento que se dan en la actualidad.

Ha habido numerosos precedentes (algunos de ellos ilustres, como los vórtices de Lord Kelvin) de intentar hacer ciencia positiva mediante la razón pura. Ninguno de ellos se ha visto coronado por el éxito hasta ahora.

Por otra parte, es también importante mantener abierta la posibilidad de que toda la tendencia hacia la unificación de las interacciones (el *reduccionismo extremo* que es la filosofía espontánea de la mayoría de los físicos teóricos) sea una tendencia equivocada, fruto de uno (o varios) espejismos.

En palabras del propio Wigner, *The question which presents itself is whether the different regularities, that is, the various laws of nature which will be discovered, will fuse into a single consistent unit or, at least asymptotically approach such a fusion*[13]. Su escepticismo al respecto quedaba claramente reflejado en sus palabras: *It is even possible that some of the laws of nature will be in conflict with each other in their implications, but each convincing enough in its own domain so that we may not be willing to abandon any of them*[14].

Esto haría prácticamente estéril la mayor parte del esfuerzo de la comunidad de físicos teóricos durante los últimos veinte años. Desgraciadamente los físicos no tenemos código de honor, y todas estas teorías, por bellas que sean, están condenadas al infierno de la inútil hermosura si no resisten la prueba de su confrontación con el experimento.

Nada mejor, para terminar con una nota optimista, que las famosas palabras del físico americano P. W. Bridgman[15] *whatever may be one's opinion as to the simplicity of either the laws or the material structure of nature, there can be no question that the possessors of some such conviction have a real advantage in the race for physical discovery. Doubtless there are many simple*

[13] La cuestión que se plantea es si las diferentes regularidades; esto es, las diferentes leyes de la naturaleza que vayan a ser descubiertas, se fusionarán en una unidad consistente o, al menos asintóticamente, se aproximarán a una tal fusión.

[14] Es posible incluso que algunas de las leyes de la naturaleza estén en conflicto mutuo en sus implicaciones, pero cada una de ellas suficientemente convincente en su propio dominio, de forma que no estemos dispuestos a abandonar ninguna de ellas.

[15] Cuya especialidad, curiosamente, era el estudio de la materia sometida a muy altas presiones y temperaturas.

connections still to be discovered, and he who has a strong conviction of the existence of these connections is much more likely to find them than he who is not at all sure they are there[16].

Bibliografía

[1] GREEN, M. B., SCHWARTZ, J., WITTEN, E.: *Superstring Theory*, Cambridge Univ. Press, 1996.

[2] LUST, D., THEISEN, S.: *Lectures in String Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Enrique Álvarez, Instituto de Física Teórica, C-XVI
Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid

[16] Cualquiera que sea la opinión personal sobre la sencillez tanto de las leyes como de la estructura material de la naturaleza, no se puede dudar de que los que posean esa convicción tienen una ventaja real en la carrera hacia los descubrimientos físicos. No hay duda de que existen muchas relaciones sencillas todavía no descubiertas, y aquél que posea un convencimiento profundo de la existencia de esas relaciones tiene muchas más probablilidades de encontrarlas que aquél que no está seguro de que estén ahí.