Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

En la jornada inagural de cada Congreso Internacional de Matemáticas (ICM), desde el de Oslo en 1936, se hace entrega de las Medallas Fields, el más alto galardón de nuestra ciencia, que, en número que varía de dos a cuatro, reconoce "logros sobresalientes en Matemáticas" [F]. Es una norma no escrita, pero ya tradicional, que los distinguidos con la Medalla Fields no hayan cumplido cuarenta años en el momento de la concesión.

Es ésta una de las circunstancias que distinguen a las Medallas Fields, definidas con frecuencia como los Nobel de Matemáticas, de los premios que concede la Academia Sueca. Pero hay algunas coincidencias entre ambos, además del hecho obvio de que los dos sirvan como reconocimiento de una actividad científica de la máxima calidad y relevancia internacional.

John Charles Fields (1863-1932)

La primera es que tanto los Nobel como las Fields deben su existencia a los legados de los científicos que les dan nombre.

John Charles Fields fue un matemático canadiense nacido en Hamilton, Ontario, el 14 de mayo de 1863. Se licenció en matemáticas en la Universidad de Toronto en 1884 y obtuvo el doctorado en la Universidad Johns Hopkins en 1887. Tras un breve periodo como profesor en el Allegheny College, Fields pasó diez años en Europa, donde se relacionó con matemáticos de la talla de Fuchs, Frobenius, Hensel, Mittag-Leffler, Max Planck y Schwarz. En 1902 regresó a la Universidad de Toronto, donde permaneció hasta su muerte el 9 de agosto 1932. El principal campo de interés de J.C. Fields fueron las funciones algebraicas. El Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, radicado en la Universidad de Toronto, fue bautizado en su honor.

Fields fue presidente del ICM de Toronto en 1924. Al término de este Congreso, el Comité Organizador se encontró con un pequeño superávit, y Fields propuso dedicarlo a financiar un premio en matemáticas. Pero la idea de Fields no pudo hacerse realidad hasta su muerte, cuando él mismo legó la mayor parte de su herencia para este fin.

Probablemente impresionado por la tragedia que supuso la Primera Guerra Mundial, y por las divisiones que causó en la comunidad matemática (a los matemáticos de los países perdedores no se les permitió formar parte de la International Mathematical Union, creada en 1923, y como consecuencia no fueron invitados a asistir al Congreso de Toronto, como tampoco lo habían sido al de Estrasburgo en 1920; y la misma elección de la ciudad alsaciana como sede del primer Congreso después de la guerra ya indica que no todas las decisiones se tomaban con criterios estrictamente científicos), Fields sugirió que las medallas debían "ser de un carácter tan puramente internacional e impersonal como sea posible. No deben vincularse en modo alguno al nombre de ningún país, persona o institución" [F]. Es por tanto seguro que Fields se habría opuesto a que la medalla fuese universalmente conocida por su nombre, aunque su denominación oficial sea "Medalla Internacional para Descubrimientos Sobresalientes en Matemáticas".

Fields también señaló que "aunque la concesión del premio debe basarse en trabajo ya realizado, debe al mismo tiempo servir para animar futuros logros de los galardonados y como estímulo para el esfuerzo renovado de otros" [F]. Este es el origen de la tradición de premiar sólo a menores de cuarenta años.

El ICM de Zurich en 1932 aceptó el legado de Fields, fallecido unos meses antes, y, de acuerdo con sus planes, nombró un comité presidido por Constantin Carathéodory que, en el ICM de Oslo en 1936, otorgó las dos primeras medallas Fields a Lars Valerian Ahlfors y Jesse Douglas. Desde entonces se han concedido un total de 38 Medallas.

Una segunda similitud de las Medallas Fields con los premios Nobel es que, si bien no están todos los que son, ciertamente son todos los que están: la lista de los galardonados con la Medalla Fields que incluimos al final de esta breve introducción, reune a muchos de los más brillantes creadores de las Matemáticas de nuestro siglo.

El objetivo de esta sección es ayudar a los lectores de La Gaceta a conocer las aportaciones de estos insignes matemáticos. Por supuesto se pueden encontrar otras muchas buenas presentaciones, por ejemplo en los Libros de Actas de los correspondientes Congresos. Pero, aparte de las dificultades de idioma y de localización, confiamos en que los artículos que aparezcan en esta sección de la Gaceta aporten un punto de vista que permita entender cual ha sido la influencia de los medallistas Fields en el desarrollo reciente de las Matemáticas en España.

Por supuesto no podemos predecir cuanto tardará una matemática o matemático español en recibir una Medalla Fields, pero creemos que es un síntoma de la buena salud de las matemáticas en nuestro país el que muchos de ellos puedan glosar los trabajos de estos gigantes de las Matemáticas desde el conocimiento directo que da el haberlos estudiado y haberlos utilizado en su propia investigación, e incluso en algunos casos, como el que inaugura la sección, el haber colaborado personalmente con ellos.

Referencias

[F] Texto de un documento sin fecha firmado por J.C. Fields en que se sentaban las bases para la creación de la medalla que hoy lleva su nombre. Figura como anexo al acta de la reunión del 12 de enero de 1932 del Comité Organizador del ICM de 1924.

Galardonados con la Medalla Fields

1936: Lars V. Ahlfors, Jesse Douglas.

1950: Laurent Schwartz, Alte Selberg.

1954: Kunihiko Kodaira, Jean-Pierre Serre.

1958: Klaus F. Roth, René Thom.

1962: Lars V. Hörmander, John W. Milnor.

1966: Michael F. Atiyah, Paul J. Cohen, Alexander Grothendieck, Stephen Smale.

1970: Alan Baker, Heisuke Hironaka, Serge P. Novikov, John G. Thompson.

1974: Enrico Bombieri, David B. Mumford.

1978: Pierre R. Deligne, Charles L. Fefferman, Gregori A. Margulis, Daniel G. Quillen.

1982: Alain Connes, William P. Thurston, Shing-Tung Yau.

1986: Simon Donaldson, Gerd Faltings, Michael Freedman.

1990: Vladimir Drinfeld, Vaughan Jones, Shigefumi Mori, Edward Witten.

1994: Pierre-Louis Lions, Jean-Christophe Yoccoz, Jean Bourgain, Efim Zelmanov.

Países de Nacimiento de los Galardonados con la Medalla Fields	**Países de Residencia de los Galardonados con la Medalla Fields en el Momento de la Concesión**
Alemania: 3 Bélgica: 2 Estados Unidos: 10 Finlandia: 1 Francia: 6 Hong - Kong: 1 Italia: 1 Japón: 3 Nueva Zelanda: 1 Noruega: 1 Reino Unido: 4 Rusia: 3 Suecia: 1 Ucrania: 1	Estados Unidos: 20 Francia: 8 Italia: 1 Japón: 1 Reino Unido: 4 Rusia: 2 Suecia: 1 Ucrania: 1

Efim Zelmanov, medalla Fields

por

Santos González Jiménez

La Real Sociedad Matemática Española me solicita un artículo sobre Efim Zelmanov (Medalla Fields en el último Congreso Internacional de Matemáticas, Zurich 1994), recogiendo tanto nuestra relación personal y científica con tan insigne matemático como su contribución a la solución del Problema Restringido de Burnside y las consecuencias y trabajos posteriores realizados en torno a tan apasionante tema.

E. Zelmanov junto a miembros del equipo de investigación que coordina S. González en su primera visita a la Universidad de Oviedo tras la concesión de la Medalla Fields.

Datos Biográficos

Efim Zelmanov, de 42 años de edad, es natural de Novosibirsk (Rusia) y es Licenciado y Doctor en Matemáticas por dicha Universidad. Fue miembro del Instituto de Investigación de Novosibirsk hasta 1991 y desde entonces ha sido profesor en las Universidades de Oxford, Wisconsin, Chicago y, desde 1995, Yale. Ha sido conferenciante en los más importantes centros matemáticos del mundo y es Editor de revistas del mayor prestigio. Además de la medalla Fields recibida en 1994 por la brillante solución del centenario Problema de Burnside, recibió en 1992 la medalla del College de France, galardón de gran prestigio en dicho país.

ASPECTOS DE NUESTRA VINCULACIÓN PERSONAL

Conocí personalmente al Prof. Zèlmanov en agosto de 1988 en el Instituto de Matemáticas de Oberwolfach, lugar en el que le realicé la invitación para visitar la Universidad de Zaragoza, donde entonces realizaba mis tareas académicas. Dicha visita se llevó a cabo en abril de 1989 y en la misma se dedicaron tres días a unas Jornadas sobre Modelos Algebraicos No Asociativos y Sus Aplicaciones, a las que asistieron matemáticos especialistas del tema de las Universidades de Granada, Málaga, Madrid, Rabat y Montpellier. En dichas Jornadas, Zelmanov expuso por primera vez su solución al Problema Restringido de Burnside que, como se ha indicado, le valió la concesión de la Medalla Fields. Previamente, durante nuestra correspondencia preparatoria de la visita, recibí una carta de la que, de su propia letra, resalto las siguientes líneas:

"Two weeks ago I solved the Restricted Burnside's Problem for groups of exponent p^k, $p \neq 2, 3$. It was my nightmare of the last year. The theorem sounds as follows:

Theorem. For any integers $m \geq 1$, $k \geq 1$ and prime $p \neq 2, 3$ there are only finitely many finite m-generated groups of exponent p^k.

To say the truth I have never done such complicated proof before and have never born it with such tortures".

¡Sin duda un gran logro matemático que su visita a España nos dió la oportunidad de conocer casi en primicia matemática!

Días después de su visita, el domingo 29 de abril de 1989, el Heraldo de Aragón publicaba un artículo del que suscribe en el que literalmente se recogía:

"Durante los días 13, 14 y 15 de abril, en la Facultad de Ciencias Matemáticas de nuestra Universidad, se han celebrado unas jornadas sobre modelos algebraicos no asociativos y sus aplicaciones. A las mismas han asistido profesores de diferentes universidades de nuestro país y de fuera de él, destacando la participación del profesor ruso Efim Zelmanov. El profesor Zelmanov, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Novosibirsk, es considerado el primer especialista mundial en la materia habiendo resuelto recientemente un importante e histórico problema de las matemáticas, al que ha dado solución con los modelos algebraicos objeto de la reunión. De esta solución, aún sin publicar, ha dado cuenta en primicia mundial a los participantes en las jornadas. La solución de tal conjetura matemática le convierte, sin duda, en uno de los más firmes aspirantes a la Medalla Fields (el equivalente al Premio Nobel, que no existe para esta disciplina), que otorga el Congreso Internacional de Matemáticas y que requiere como condición necesaria el no haber superado los cuarenta años de edad".

Esta afortunada premonición, al cumplirse, nos llenó de orgullo y satisfacción a los que conocíamos la valía científica y humana del Dr. Efim Zelmanov.

Mi traslado, el curso 91-92, a la Universidad de Oviedo hace que, desde entonces, las frecuentes visitas a España del Dr. Zelmanov se realicen a esta Universidad, excepto una visita realizada en enero de 1995 a la Universidad de Granada para formar parte del tribunal de una tesis doctoral dirigida por el Dr. Rodríguez Palacios y a la Universidad de Málaga en junio de 1997 para una reunión organizada por el área de Algebra de dicha Universidad. En 1993 se celebra en Oviedo la "Third International Conference in Non associative Algebra and its Applications" reuniendo a más de 300 matemáticos de todo el mundo y en ella el Dr. Zelmanov fue miembro de su Comité Científico y pronunció una conferencia plenaria. Oviedo tiene tambien el honor de ser la primera Universidad que visita en septiembre de 1994, recién concedida la medalla Fields, siendo recibido por las más altas autoridades regionales. También en su visita de diciembre de 1997 fue recibido por la Excma. Sra. Ministra de Educación, Dña. Esperanza Aguirre. Las frecuentes visitas que, como se ha indicado, realiza el Prof. Zelmanov a Oviedo desde 1992 están motivadas por el trabajo que desde entonces viene realizando con la Dra. Consuelo Martínez López. La Dra. Martínez de la Universidad de Oviedo (miembro del equipo que yo coordino y del que forman parte algebristas de las Universidades de Zaragoza, La Rioja, León y Oviedo) había realizado su tesis doctoral en Zaragoza, en teoría de grupos, incorporándose posteriormente al equipo de álgebras no-asociativas (que yo dirigía), por lo que era la persona idónea para realizar tareas de investigación con el Dr. Zelmanov en el marco de la teoría de grupos y con la utilización de herramientas del álgebra no asociativa, que habian llevado, como se indicará posteriormente, a feliz término el Problema Restringido de Burnside. El trabajo de la Dra. Martínez y el Prof. Zelmanov en estos últimos años, reflejado en numerosas publicaciones conjuntas y en plena actividad en estos momentos, se presentará brevemente en la parte final del artículo.

EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE BURNSIDE

Quiero reflejar aquí, textualmente, la reseña que el Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado del 3 al 14 de Agosto de 1994, entregó a los asistentes y donde se indicaba el motivo por el que los cuatro medallistas recibían el preciado galardón. Referente al Dr. Zelmanov decía:

"Efim Zelmanov has received the Fields Medal for his brilliant solution of a long-standing mathematical problem, known as the Burnside problem. This is a problem from group theory, the mathematical study of symmetry. It asks for a bound on the number of symmetries of an object when each particular symmetry has bounded order. As with all important mathematical results, this one has many consequences, including some which were not even known to be related to the Burnside problem and had been independently conjectured".

Presentar aquí, en esta breve nota, la historia y el desarrollo de este celebrado problema de teoría de grupos es tarea harto difícil, por no decir imposible, y desde luego escapa a mis intenciones. El problema tiene su origen en 1902 cuando el matemático inglés W. Burnside plantea el conocido Problema General de Burnside:

¿Es finito un grupo con un número finito de generadores y cuyos elementos tienen todos orden finito?

La respuesta, negativa, fue dada por Golod en 1964. No obstante existe respuesta positiva para familias importantes de grupos, como los grupos periódicos lineales y los grupos periódicos resolubles. Burnside consideró asímismo el llamado Problema Ordinario de Burnside, incorporando la hipótesis adicional de existencia de cota de los órdenes de los elementos del grupo, que se denomina exponente del grupo. Si el exponente es 2, entonces todos los elementos del grupo son reflexiones, pues al componerlos consigo mismos deben dar la identidad y en este caso es muy fácil comprobar que el grupo en cuestión es finito y de hecho el número de elementos del grupo es a lo sumo 2 elevado al número de generadores. Para exponente 3 las cosas son mucho más difíciles y el mismo Burnside publicó en 1902 una demostración del resultado positivo para ese caso. Hay pruebas del resultado positivo para exponente 4, debida a Sanov en 1940, y para exponente 6, por M. Hall en 1958, pero hasta la fecha no se conoce ningún otro exponente para el que el Problema Ordinario de Burnside tenga respuesta positiva.

En 1968 Novikov y Adian fueron capaces de construir para cada número impar n mayor que 4.381 un grupo infinito de exponente n con un número finito de generadores. Así que, en general, la respuesta al Problema Ordinario de Burnside es, al igual que para el Problema General, negativa. Posteriormente Adian mejoró la cota probando la existencia de tales grupos para exponentes impares mayores que 665.

En 1992 Ivanov probó el mismo resultado para grupos de exponente una potencia de 2 suficientemente grande. Por tanto podemos afirmar que existen grupos infinitos de exponente, par o impar, suficientemente grande y con un número finito de generadores.

Es por todo ello por lo que, desde la década de los años veinte, se inicia el tratamiento de la parte finita de esta conjetura y que se conoce como el Problema Restringido de Burnside.

La pregunta es la siguiente: dadas cotas n y m, ¿es cierto que sólo hay un número finito de grupos finitos que puedan ser generados por n elementos y cuyo exponente sea a lo sumo m?

Entre 1956 y 1979 Kostrikin fue capaz de resolver el Problema Restringido para grupos cuyo exponente es un número primo.

Finalmente, el proceso culmina en 1990 cuando Zelmanov resuelve afirmativamente este problema. Su demostración se apoya en tres aportaciones previas centrales:

1. Los resultados de Kostrikin.
2. El teorema de reducción de Hall y Higman de 1956.
3. La clasificación de los grupos simples finitos, hito histórico de las matemáticas del siglo XX.

Con los comentarios precedentes, y no pudiendo resaltar los cientos de contribuciones en esta dirección, podemos concluir que la genial solución de Zelmanov es fruto de una maravillosa combinación de métodos y técnicas de la Teoría de Grupos y de la Teoría de Algebras, lo que pone de manifiesto, una vez más la grandeza y universalidad de las Matemáticas.

Relación con Grupos Profinitos

Un grupo residualmente finito G es un grupo que puede ser aproximado por grupos finitos. Es decir, G posee un a familia de subgrupos normales G_i tales que $\cap G_i = 1$ y cada cociente G/G_i es un grupo finito.

Si G es residualmente finito, el sistema de subgrupos de índice finito se puede tomar como base de entornos de la unidad, transformando G en un grupo topológico. Si G es completo en tal topología G es un grupo profinito. Equivalentemente G es un límite inverso de grupos finitos.

Todo grupo residualmente finito se puede incrustar en su compleción profinita. Para un grupo arbitrario G, el grupo $G/\cap\{H|\ |G:H|<\infty\}$ es residualmente finito. Su compleción profinita $\hat{G}$ se llama"compleción profinita" de G.

Es fácil ver que el Problema Restringido de Burnside es equivalente al Problema Ordinario de Burnside para grupos residuamente finitos y así mismo al Problema Ordinario de Burnside para grupos profinitos.

Platonov conjeturó que los grupos periódicos (Hausdorff) son localmente finitos. Wilson probó que (bajo la hipótesis de existencia de un número finito de grupos simples esporádicos) basta probar la conjetura para pro-p-grupos. Zelmanov tambien probó este resultado, del que se sigue la existencia de un subgrupo abeliano infinito en todo grupo compacto infinito.

En el contexto de grupos profinitos, cuando decimos que el grupo G está finitamente generado por elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n$, entendemos que el grupo H engendrado por dichos elementos es un subgrupo denso en G.

Serre planteó la siguiente

Conjetura. Todo subgrupo de índice finito de un grupo G profinito y finitamente generado es cerrado (ó equivalentemente abierto).

El propio Serre lo probó para la clase de los pro-p-grupos, donde si $\mathcal{C}$ es una clase de grupos finitos un pro-$\mathcal{C}$-grupo es un límite inverso de grupos en la clase $\mathcal{C}$. Anderson lo probó para la clase de pro-$\mathcal{C}$-grupos cuando $\mathcal{C}$ es la clase de los grupos finitos abelianos por nilpotentes, Oltikar y Ribes para $\mathcal{C}$ la clase de los grupos finitos supersolubles y Hartley para la clase de grupos finitos resolubles con una altura de Fitting l, es decir, grupos que poseen una serie normal de longitud l en que cada factor es un grupo nilpotente.

Shalev conjeturó que para cada n el subgrupo G^n generado por las potencias n-simas de elementos de G es cerrado. Una respuesta afirmativa a la conjetura de Shalev implicaría, via el Problema Restringido de Burnside, una respuesta afirmativa a la conjetura de Serre.

Además la conjetura anterior puede ser reformulada en términos de grupos finitos. En efecto, para probar que si G es un pro-$\mathcal{C}$-grupo cualquier subgrupo potencia G^n es cerrado basta probar que para cada par de enteros positivos m y n existe un entero $N = N(n, m)$ tal que en un grupo m-generado de $\mathcal{C}$ cualquier elemento del subgrupo G^n se puede representar como un producto de N potencias de elementos de G.

En dos trabajos sucesivos C. Martínez probó dicho resultado para la clase de los grupos nilpotentes primero y para la clase considerada por Hartley después. Posteriormente, en un trabajo conjunto con Zelmanov, probaron el mismo resultado para la clase de los grupos simples finitos. El problema sigue abierto para la clase de los grupos finitos resolubles (sin acotar la altura de Fitting).

El problema anterior está relacionado con un problema planteado, independientemente, por Olshanski y Rips:

¿Existe una función $F(n, m)$ tal que si G es grupo finito m-generado y sus elementos de longitud $k \leq F(m, n)$ en los generadores tienen orden divisor de n entonces el exponente del grupo es un divisor de n?

El interés de dicha cuestión se debe a que una respuesta afirmativa permitiría, gracias a una construcción de Adian y Lysenok, mostrar un ejemplo de grupo hiperbólico no residualmente finito y, análogamente, un ejemplo de grupo hiperbólico no virtualmente libre de torsión, habiendo sido su existencia conjeturada desde la introdución de dichos grupos por Gromov sin que se disponga hasta el momento de ninguno de los mencionados ejemplos.

C. Martínez ha probado la existencia de tal función para todo grupo finito resoluble, reduciendo la existencia para un grupo finito cualquiera a la existencia de la función para los grupos simples finitos.

Otros Problemas Relacionados

Algunos problemas relacionados con el Problema Restringido de Burnside dependen de la respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué ocurre si se impone la periodicidad no sobre todos los elementos del grupo, sino sobre algunos de ellos?

Cuestiones interesantes aparecen cuando se consideran elementos primitivos, es decir, elementos que se pueden incluir en un sistema de m generadores libres del grupo libre de rango m. Respuestas positivas a problemas planteados en este contexto permitirían la construcción de ejemplos de superficies complejas proyectivas con grupos fundamentales "salvajes". Bogomolov y Katzarkov han probado que si la conjetura de Shafarevich (la cubierta universal de una variedad proyectiva compleja lisa es holomorficamente convexa) es cierta, entonces la existencia para un $n \geq 1$ y un $m \geq 2$ de un grupo finito m-generado de exponente n implica la existencia de un grupo infinito de exponente n generado por cualquier número arbitrario de elementos. Así, si para algún exponente n se supiera que todo grupo 2-generado de exponente n es finito, mientras que existe un grupo de exponente n generado por un número mayor de generadores que es infinito, se habría dado una respuesta negativa a la conjetura de Shafarevich.

Los pro-p-grupos de coclase finita han sido ampliamente estudiados. Estos grupos están relacionados con álgebras de Lie que tienen dimension de Gelfand-Kirillov 1, cuya clasificación no se conoce. Con el objetivo inicial de acercarse a estas estructuras C. Martínez y Zelmanov han estudiado algebras de Jordan de GK-dimensión 1, aplicando los resultado obtenidos a la clasificación de álgebra y super álgebras de Jordan con condiciones de finitud en su crecimiento.