PREGUNTAS EN BUSCA DE RESPUESTAS

Sección a cargo de

Antonio Sánchez Calle

Progresiones aritméticas en sucesiones de enteros

por

Javier Cilleruelo

Paul Erdős, uno de los más prolíficos, originales e influyentes matemáticos del siglo XX, murió en Varsovia el 20 de septiembre de 1996. Publicó más de 1.500 artículos con más de 500 colaboradores. Erdős poseía un talento especial para proponer nuevos problemas. Para añadir más aliciente a sus ya interesantes problemas acostumbraba a ofrecer premios en metálico por la resolución de cada uno de ellos ([4],[5],[7]). Las cantidades podían variar entre 1 dólar y 10.000 dólares según su dificultad.

La revista *Mathematica Japonica* mantiene los premios para los innumerables problemas de Erdős que siguen sin estar resueltos [1].

La siguiente conjetura era una de sus favoritas.

CONJETURA

Si A es una sucesión de enteros positivos tal que $\sum_{a\in A} 1/a = +\infty$ entonces, para todo entero k, la sucesión A contiene una progresión aritmética de k términos.

Esta conjetura, que Erdős valoraba en 5.000 dólares, ni siquiera se ha logrado demostrar para el caso más sencillo $k = 3$.

Sus consecuencias darán una idea de su dificultad [2].

1. Es conocido que la suma de los inversos de los números primos es infinita. Entonces, si la conjetura fuese cierta, existirían progresiones aritméticas de primos de tantos términos como se quisiera. Esto, sin embargo, tampoco está probado [9].

   Aún más difícil resulta encontrar progresiones aritméticas de primos consecutivos. La de mayor longitud ha sido encontrada recientemente (10 de marzo de 1998) y consta de 10 términos [3].

2. En 1936 Erdős y Turán [6] conjeturaron que si una sucesión de enteros positivos A tiene densidad positiva ($A(x) > cx$ para todo x y para alguna constante $c > 0$, donde $A(x)$ es el número de enteros de la sucesión que son $\leq x$) entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Szemerédi recibió 1.000 dólares de Erdős cuando demostró la conjetura en 1975 [8]. Fue la mayor cantidad pagada por uno de sus problemas y uno de los resultados más notables en la teoría de los números. El teorema de Szemerédi sería una consecuencia inmediata de la conjetura, debido a que la suma de los inversos de una sucesión de densidad positiva es comparable con la serie armónica, cuya suma es infinita.

Referencias

[1] A. ADAM; K. GYÖRY Y A. SÁRKÜZY: *The life and Mathematics of Paul Erdős*, Math. Japonica 46 No. 3 (1997), 517-526.

[2] J. CILLERUELO Y A. CÓRDOBA: *La teoría de los números*, Edit. Mondadori, 1992.

[3] H. DUBNER, A. FORBES, N. LYGEROS, M. MIZONY Y P. ZIMMERMANN: *Ten consecutive primes in arithmetic progression* NMBRTHRY LOG9803.

[4] P. ERDŐS: *On some of my favourite theorems*, Bolyai Math. Soc. Studies 2 (1996), 97-132.

[5] P. ERDŐS: *Some of my favourite problems and results*, The Mathematics of Paul Erdős, vol. I, (R.L. Graham et al., eds.), Algorithms Combinartorics, 13, Springer, 1997, 47-67.

[6] P. ERDŐS Y P. TURÁN: *On certain sequences of integers*, J. London Math. Soc. 11 (1936) 261-264.

[7] R. K. GUY: *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag, 1981.

[8] E. SZEMERÉDI: *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progresion*, Acta Arith. 27 (1975) 199-245.

[9] S. WEINTRAUB: *Seventeen primes in arithmetic progression*, Math. Comput. 31 (1977) 1030.

* * *