

## Probabilidades geométricas, geometría integral y geometría estocástica: aplicaciones

por

Luis A. Santaló

*Conferencia pronunciada en el Acto Inaugural de los Cursos 1979-80 del Instituto Universitario de Investigación Operativa y Estadística de la Universidad Complutense de Madrid, el día 13 de noviembre de 1979. El texto ha sido completado con ciertos detalles y comentarios bibliográficos. Este texto apareció publicado por primera vez en los Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, tomo 32, de la ciudad de Buenos Aires. Sigue siendo una brillante introducción a la probabilidad geométrica y a la geometría probabilística, como bien apreciará el lector. El Profesor Luis A. Santaló recibió el premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica en 1981. Referimos al lector al volumen 1, número 1 de La Gaceta para una reseña bibliográfica y una entrevista del Profesor Santaló realizadas por Miguel de Guzmán.*

Agradecemos a la Academia Nacional de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Buenos Aires que nos haya permitido reproducir este artículo.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las Probabilidades Geométricas y sus sucesivos desarrollos hacia la Geometría Integral y la Geometría Estocástica constituyen un ejemplo típico de cómo se originan y evolucionan muchas teorías matemáticas, y aún la matemática misma en su totalidad. Se empieza por cuestiones de ingenio o curiosidad, no demasiado trascendentes, pero atractivas como juego, pasatiempo o ejercicio intelectual. Reciben luego la influencia de otras partes de la matemática, que apoyan su desarrollo y les proporcionan el lenguaje y estructura necesarios para adquirir carta de ciudadanía matemática, estableciéndose una interacción a través de la cual las nuevas ideas se benefician de las ya existentes y éstas, a su vez, consiguen nuevos puntos de vista útiles para iluminar y fortalecer sus propios problemas. Cuando ya la teoría tiene cuerpo propio y está engranada de manera armoniosa y firme con el tronco general de la matemática, aparecen las aplicaciones, que a veces no salen de la matemática misma, pero que otras veces

resultan insospechadas y de interés para ramas muy diversas de la ciencia o de la técnica.

En el caso de las Probabilidades Geométricas, los comienzos fueron simples juegos de azar, más teóricos que prácticos, pero que interesaron por su novedad conceptual. La etapa intermedia fue la evolución hacia la Geometría Integral y la Geometría Estocástica, a través de las cuales las primeras ideas se vincularon con la teoría de grupos, la geometría diferencial y, más tarde, con la teoría de procesos estocásticos, con mutuos beneficios para la incipiente teoría y para estos capítulos ya desarrollados de la matemática, que quedaron así conectados entre sí por puentes insospechados y armoniosos. Más tarde aparecieron las aplicaciones, por ejemplo la Estereología, que sistematizó una gran cantidad de resultados dispersos e inconexos, útiles a ramas muy diferentes de la técnica. Otra aplicación de gran resonancia, fue la llamada tomografía computacional por rayos X, de interés fundamental en la medicina de los últimos años. Nuestro objeto es desarrollar con cierto detalle este origen, evolución y estado actual de la teoría de Probabilidades Geométricas.

## 2. ORIGEN DE LAS PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS

### 2.1. Buffon y el problema de la aguja

George Louis Leclerc (1707-1788), nombrado Conde de Buffon por Luis XV, fue un gran naturalista francés, posiblemente, junto con Linneo, el más grande de su siglo. Escribió una extensa Historia Natural de 36 tomos. En su juventud, sin embargo, tuvo inclinación por la matemática y aunque no se distinguió mayormente en ella, su ingreso a la Academia de Ciencias de París, en 1734, fue como cultivador de la mecánica racional. Su interés por la matemática no lo abandonó nunca y así en 1777, en el tomo IV del "Suplemento a la Historia Natural", publicó un opúsculo titulado "Essai d'Aritmétique Morale", en el cual se encuentra el origen de las probabilidades geométricas [8].

Como buen naturalista, a Buffon le interesaba el hombre en su totalidad, incluso en sus reacciones afectivas y sus preocupaciones y temores (miedo a la muerte), y sus pasiones, entre ellas la de los juegos de azar. La posibilidad, que intenta, de tratar estas cuestiones con la matemática, distinguiendo entre el número y la influencia del mismo en el comportamiento de las personas, originaron el adjetivo de "moral" añadido al título del fascículo mencionado.

Después de varias disquisiciones sobre la "esperanza moral" en la teoría de probabilidades, ya introducida por Jacob Bernoulli en 1713, observa que "el Análisis ha sido el único instrumento que hasta la fecha se ha utilizado en la ciencia de las probabilidades, como si la Geometría no fuera indicada

para estos fines, cuando en realidad basta un poco de atención para observar que la ventaja del Análisis sobre la Geometría es tan sólo accidental y que el azar es tan propio de la Geometría como del Análisis". Después añade "para poner a la Geometría en posesión de sus derechos sobre la ciencia del azar, bastará inventar juegos que se basen en la extensión y sus relaciones". Menciona a continuación, como ejemplo, el juego llamado de "franc carreau" (sobre un piso cuadrículado se lanza al azar una moneda circular y se pide la probabilidad de que quede completamente interior a uno de los cuadrados, sin cortar ninguna línea de separación) y para demostrar que pueden inventarse otros muchos juegos por el estilo, describe el siguiente juego, que desde entonces ha sido reproducido en muchos tratados de probabilidades bajo el nombre de "problema de la aguja de Buffon".

Consideremos un plano, que puede ser el piso o una mesa grande, dividido por rectas paralelas a distancia  $D$  (figura 1). Se arroja al azar una aguja de longitud  $a < D$ . La probabilidad de que ella corte a alguna de las rectas paralelas es

$$p = \frac{2a}{\pi D}. \quad (1)$$

Esta fórmula es demostrada por Buffon de manera directa. Si se considera el experimento como un juego de azar, la probabilidad  $p$  es lo que debe valer la "puesta" del jugador, para recibir, si gana, el premio de una unidad, suponiendo el juego equitativo. Por ejemplo, si  $a = D$ , para que el juego sea equitativo, la puesta debe valer  $p = 2/\pi = 0,636$  pesos, con el convenio de recibir de premio un peso en el caso de ganar, o sea, en el caso de que la aguja corte efectivamente a alguna de las paralelas.

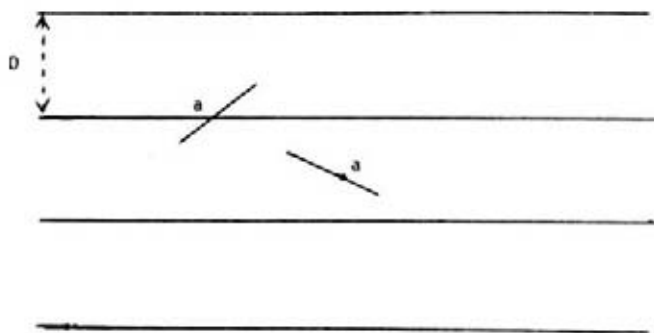


FIGURA 1

Con este problema se considera que nace la teoría de las probabilidades geométricas. Como vemos, se trata de un ejemplo de un juego de azar para cuya solución no es posible "contar" los casos posibles y los favorables (como

ocurre en los juegos discretos, como el de dados o los de barajas), sino que hay que “medir” estos casos. La diferencia entre “medir” y “contar” es lo que distingue a la Geometría de la Aritmética o del Análisis.

## 2.2. Generalización del problema de la aguja. El problema de Laplace

Una de las armas más poderosas de que dispone la matemática para su progreso es la de “generalizar” resultados concretos y particulares. En el caso del problema de la aguja de Buffon se presentan varias direcciones posibles para generalizar. En primer lugar se puede pensar en suprimir la restricción supuesta de ser  $a < D$ . Si es  $a > D$  el problema se puede resolver fácilmente [26] pero el resultado es complicado y, al faltarle simplicidad, carece de la estética que preside la matemática creadora cuando no persigue un fin práctico determinado. Tiene poco interés. En cambio, el resultado vuelve a ser simple si, en lugar de la probabilidad de cortar a alguna paralela, se pide el valor medio o esperanza matemática del número de puntos de intersección de la aguja con las paralelas. Todavía el problema puede plantearse de manera más general.

Supongamos una línea poligonal, como la indicada en la figura 2, cuyos lados tienen longitudes  $a_i < D$ . La variable aleatoria  $N =$  número de puntos en que la poligonal corta a las paralelas, es igual a la suma de las variables aleatorias que, para todo lado de la poligonal, vale 1 si corta a alguna paralela y vale 0 en caso contrario. Para estas variables aleatorias, la esperanza es igual a la probabilidad (1), para el  $a_i$  correspondiente. Por tanto, como la esperanza de la suma es igual a la suma de las esperanzas y la suma de las longitudes  $a_i$  es igual a la longitud  $L$  de la poligonal, resulta

$$E(N) = \frac{2L}{\pi D} \quad (2)$$

Como toda curva rectificable de longitud  $L$  puede considerarse el límite de poligonales inscriptas, resulta que (2) vale para cualquier curva rectificable, como la indicada en la figura 2.

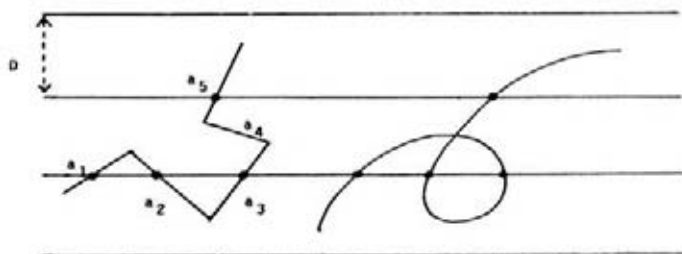


FIGURA 2

También este resultado puede interpretarse como un juego de azar. Supuesto el plano dividido por rectas paralelas a distancia  $D$ , se lanza sobre el mismo, al azar, una curva de longitud  $L$  y forma cualquiera, incluso puede ser un hilo flexible. El jugador recibe un premio igual al número  $N$  de puntos en que la curva corta a las paralelas (por ejemplo, en la figura 2, es  $N = 4$ ). Para que el juego sea equitativo, la puesta debe valer  $E(N) = 2L/\pi D$  pesos. Obsérvese, nuevamente, que el resultado no depende de la forma de la curva, sino únicamente de su longitud. Para este tipo de problemas, ver [40].

Otra generalización posible del problema de la aguja, consiste en suponer el plano dividido en rectángulos de lados  $D_1, D_2$  en vez de rectas paralelas (figura 3). Supuesta una aguja de longitud  $a$ , menor que el menor de los lados  $D_1, D_2$ , la probabilidad de que corte a algunos de los lados de la red de rectángulos, es

$$p = \frac{2a(D_1 + D_2) - a^2}{\pi D_1 D_2} \quad (3)$$

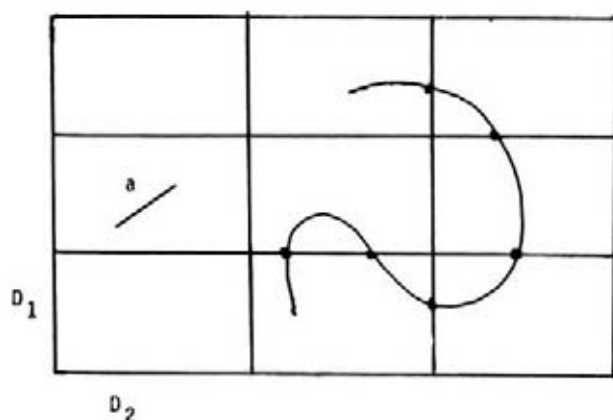


FIGURA 3

Este caso fue considerado por Laplace en su monumental obra **Théorie Analytique des Probabilités** [28, pág. 560]. Obsérvese que si alguno de los lados,  $D_1$  o  $D_2$  tiende a infinito, el problema se reduce al de Buffon y el resultado (3) pasa al (1).

Combinando las dos generalizaciones, cabe considerar el valor medio o esperanza matemática del número de puntos  $N$  en que una curva de

longitud  $L$  y forma cualquiera, colocada al azar en el plano, corta a los lados de la red de rectángulos (figura 3). El resultado es:

$$E(N) = \frac{2L(D_1 + D_2)}{\pi D_1 D_2}, \quad (4)$$

Por ejemplo, si se toma un cuadrículado de lados  $D_1 = D_2 = 10$  cm y se arroja sobre el mismo una curva de forma cualquiera y longitud  $L = 20$  cm, el valor medio del número de puntos de intersección es  $E(N) = 8/\pi = 2,54$ . Es decir, en un juego equitativo en el cual se recibe de premio tantos pesos como puntos de intersección resulten entre la red de cuadrados y la curva lanzada, la puesta debe valer  $E(N) = 2,54$  pesos. Si se cobra más, el juego es favorable a la banca y si se cobra menos al jugador.

En vez de rectángulos se puede suponer el plano dividido en triángulos, hexágonos u otros polígonos congruentes de forma cualquiera y considerar problemas análogos. Sobre ello, ver [42, Cap. 8].

### 2.3. Primeras aplicaciones: el método de Monte Carlo

Aparte de resolver ejemplos geométricos de juegos de azar, los matemáticos observaron pronto que las fórmulas anteriores encierran consecuencias curiosas.

Consideremos, por ejemplo, la primera fórmula de Buffon (1). La probabilidad  $p$  se puede calcular experimentalmente, haciendo la experiencia un número grande de veces y dividiendo el número de casos favorables por el número total de pruebas realizadas. Una vez conocida la probabilidad  $p$  (de manera experimental), la fórmula (1) permite despejar  $\pi$  y, por tanto, se tiene un método para calcular el número  $\pi$  por el azar. Este hecho llamó mucho la atención y se experimentó repetidas veces durante el siglo pasado. Muchos textos de probabilidad citan algunas de estas experiencias. Por ejemplo, en 1850, R. Wolf con una aguja de 8 cm y una red de paralelas equidistantes con 10 cm de separación, con 5.000 pruebas, obtuvo 2.532 casos en que la aguja cortaba a alguna paralela. Por tanto, se puede tomar como valor estimado  $p = 2.532/5.000 = 0,506$  y como valor de  $\pi$  resulta  $\pi = 3,159$ . Otros ejemplos se mencionan en Kendall-Moran, [26], aunque en la mayoría de ellos el resultado parece ser demasiado bueno, dado el número de pruebas. Posiblemente se aplicó el *optimal stopping* que consiste en parar la experiencia en una etapa favorable, lo cual naturalmente no es correcto ni posible cuando se desconoce el resultado. Una discusión al respecto puede verse en Gridgeman [22].

De manera más general, si se supone conocido  $\pi$ , buscando la probabilidad  $p$  o el valor medio  $E$  experimentalmente, cualquiera de las fórmulas (2), (3) o (4) permite calcular "por el azar" la longitud  $L$  de cualquier curva. Esto hizo que Laplace [28, pág. 359], observando el hecho, pudiera decir: "en

fin, se podría hacer uso del cálculo de probabilidades para rectificar curvas o cuadrar superficies, pero sin duda los geómetras no emplearán nunca este medio”.

Sin embargo, Laplace se equivocó. Las fórmulas (2), (3) y (4) se utilizaron con frecuencia un siglo más tarde para medir longitudes de curvas sobre una preparación microscópica. Sobreponiendo a una preparación para el microscopio un reticulado rectangular o un haz de paralelas equidistantes y contando el número de veces que sus lados o sus paralelas cortan a las curvas cuya longitud se desea medir, girando varias veces el reticulado y tomando promedios, se calculan estas longitudes con suficiente aproximación. A este nivel, es más fácil “contar” que “medir”.

Más tarde, a mediados del siglo actual, cuando se dispuso de las computadoras electrónicas, se estuvo en condiciones de “simular” muchas experiencias aleatorias y deducir de ellas, con exactitud aceptable, debido al gran número de experiencias que se pueden simular en poco tiempo, los valores de ciertas constantes. Si se prepara un programa, por ejemplo, que permita simular la experiencia de la aguja de Buffon, en base a tablas de números aleatorios que fijen la posición de la aguja, se puede calcular el número  $\pi$  o cualquier elemento de la fórmula (1) conociendo los demás.

Esta es la base del método de Monte Carlo, que ha tenido mucho éxito no sólo para calcular por el azar los valores de distintas constantes, sino incluso para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales, siempre que se puedan planear, y luego simular, experiencias en que estas soluciones estén involucradas en ellas de manera aleatoria. La primera referencia publicada acerca del método de Monte Carlo parece ser un trabajo de Ulam [49]. Este autor y J. von Neumann fueron los primeros en aplicarlo a problemas de la Física, sobre todo a problemas atómicos (difusión de neutrones). Más tarde, el método ha sido muy usado en toda la matemática aplicada. Para su aplicación a la Investigación Operativa puede verse, por ejemplo, el libro de J. Kohlas [27].

### 3. LA GEOMETRÍA INTEGRAL Y LA GEOMETRÍA ESTOCÁSTICA

#### 3.1. La geometría integral

Según la definición clásica, la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles. Esto anda bien cuando ambos casos son en número finito, como ocurre, por ejemplo, con los juegos de dados. Al tratarse de probabilidades geométricas, en que tanto los casos favorables como los posibles son infinitos, hubo que sustituir el “número” de casos, por la “medida” de los mismos. Desde la antigüedad se tenía costumbre de “medir” conjuntos de puntos, lo que

dio lugar al concepto de "longitud" para puntos de una curva, "área" para puntos de una superficie y "volumen" para puntos del espacio.

Con el problema de la aguja de Buffon se presentó el problema de medir conjuntos de segmentos congruentes o bien, si se quiere, conjuntos de posiciones de una misma aguja. Esto se hizo en un principio de manera intuitiva e imprecisa, midiendo el área de los puntos cubiertos por el punto medio de la aguja y luego el ángulo que la aguja podía girar alrededor de este punto para cortar o no cortar a alguna paralela. Hasta la segunda mitad del siglo pasado se adelantó poco en este sentido, manteniéndose la imprecisión en cuanto a la medida de posiciones de un elemento geométrico distinto de un punto. El primero en llamar la atención sobre el problema fue el inglés M. W. Crofton (1826-1915), quien observó que algunas discrepancias que aparecían en este tipo de problemas eran debidas a "ciertas imprecisiones del instrumento utilizado y que los conceptos básicos, como los de cualquier tema nuevo, debían ser revisados paciente y repetidamente, probándolos y corrigiéndolos a la luz de experiencias y comparaciones para purgarlos de cualquier error" (Crofton, [13], primer trabajo citado).

Para ello, empieza por definir lo que debe entenderse por rectas dadas al azar y por medida de conjuntos de ellas. Una recta del plano queda determinada por su distancia  $p$  a un origen de coordenadas y el ángulo  $\theta$  que la perpendicular a la recta por este origen forma con el eje  $x$ . Entonces -dice Crofton- para medir conjuntos de rectas hay que tomar la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial

$$dG = dp d\theta \quad (5)$$

que luego se ha llamado "densidad" para conjuntos de rectas.

De esta expresión es fácil deducir, como hace Crofton, que la medida de las rectas de un plano que cortan a un conjunto convexo  $K$  de perímetro  $L$ , es precisamente igual a  $L$ , o sea

$$\int dG = \int dp d\theta = L \quad (6)$$

En lenguaje probabilístico esto permite enunciar que la probabilidad de que una recta dada al azar que se sabe corta a un conjunto convexo  $K$ , corte también a otro conjunto convexo contenido en el interior de  $K$  es igual a  $L_1/L$  siendo  $L_1$ , la longitud del contorno del conjunto interior.

Más generalmente, se demuestra fácilmente que si la recta  $G(p, \theta)$  corta a una curva  $C$  del plano, de longitud  $L$ , en  $n$  puntos (número variable con la posición de  $G$ ), es

$$\int n dG = 2L \quad (7)$$



Obsérvese que si la curva es convexa, entonces es siempre  $n = 2$  (salvo posiciones de tangencia de medida nula) y (7) se reduce a (6).

Pronto se vió que fórmulas de este estilo tenían interés propio, aparte de las ideas probabilísticas que les habían dado origen. El espíritu generalizador de la matemática planteó el problema de extender estos resultados al espacio y definir medidas para conjuntos de rectas del espacio y para conjuntos de planos. Para los conjuntos de rectas, suponiéndolas dadas por sus ecuaciones reducidas  $x = az + p$ ,  $y = bz + q$ , la densidad para conjuntos de rectas es

$$dG = (1 + a^2 + b^2)^{-2} da db dp dq \quad (8)$$

y para conjuntos de planos  $E$ , si se representan por  $ax + by + cz = 1$ , la densidad es

$$dE = (a^2 + b^2 + c^2)^{-2} da db dc \quad (9)$$

No es nuestro objeto explicar el origen y el porqué de las densidades (8) y (9) que puede verse en cualquier libro actual de probabilidades geométricas (Kendall-Morán [26], Solomon [45], Stoka [47] o Santaló [42]). Solamente queremos mencionar algunas consecuencias que luego utilizaremos.

Supongamos una superficie fija del espacio cuya área sea  $S$ . Si  $n$  representa el número de puntos en que ella es cortada por una recta  $G$  (número variable con la posición de  $G$ ), vale la fórmula integral

$$\int n dG = \pi S \quad (10)$$

donde la integral se puede suponer extendida a todas las rectas del espacio, siendo  $n = 0$  para las rectas que no cortan a la superficie. Si se trata de una superficie convexa es siempre  $n = 2$  (salvo posiciones de tangencia de medida nula) y por tanto: la medida de las rectas que cortan a un cuerpo convexo del espacio es igual a  $(\pi/2)S$ , siendo  $S$  la superficie del cuerpo.

Si se tiene un cuerpo de cualquier forma y volumen  $V$ , fijo en el espacio, y representamos por  $\sigma$  la longitud de la cuerda que la recta  $G$  determina en el cuerpo, vale también la fórmula integral

$$\int \sigma dG = 2\pi V \quad (11)$$

Para los planos  $E$  tenemos tres fórmulas integrales. En primer lugar, si se tiene una curva fija de longitud  $L$  y  $n$  representa el número de puntos en que es cortada por el plano  $E$ , vale

$$\int n dE = \pi L \quad (12)$$

Si el plano  $E$  corta a una superficie fija de área  $S$  según una curva de longitud  $\lambda$  vale también

$$\int \lambda dE = \frac{\pi^2}{2} S \quad (13)$$

Si el plano  $E$  corta a un cuerpo del espacio de cualquier forma, pero de volumen  $V$ , y representamos ahora por  $\sigma$  al área de la sección, se tiene

$$\int \sigma dE = 2\pi V \quad (14)$$

La medida de los planos que cortan a un cuerpo convexo  $Q$  del espacio es igual a la llamada "curvatura media" de  $Q$ , o más precisamente, a la integral de la curvatura media de la superficie que limita a  $Q$ . Se representa por  $M$ , de modo que se puede escribir

$$\int dE = M \quad (15)$$

donde la integral está extendida al conjunto de los planos que tienen punto común con  $Q$ .

La integral de curvatura media  $M$  se puede definir en términos de geometría diferencial como la integral de la media aritmética de las curvaturas principales de la superficie de  $Q$ , pero es más intuitivo considerar a  $M$  como la "anchura media" de  $Q$  multiplicada por el factor  $2\pi$ . Esto hace que en algunos libros técnicos, en vez de  $M$  se use más el cociente  $M/2\pi$ , a veces con la misma letra  $M$ , que es igual a la distancia media entre planos tangentes paralelos y se denomina el *mean caliper diameter*. Por ejemplo, para una esfera de diámetro  $D$ , es  $M = 2\pi D$ . Para un segmento de longitud  $h$ , es  $M = \pi h$ . Para una lámina convexa plana de perímetro  $u$  es  $M = (\pi/2)u$ . Para un poliedro convexo, si  $a_i$  son las longitudes de las aristas y  $\alpha_i$  los ángulos diedros correspondientes, vale la fórmula

$$M = \frac{1}{2} \sum a_i (\pi - \alpha_i) \quad (16)$$

Con estas fórmulas se pueden resolver problemas de probabilidades geométricas en el espacio, pero en este sentido su interés es más teórico que real, por tratarse de experiencias difícilmente realizables. Por ejemplo, la fórmula (15) nos dice que dado un cuerpo convexo fijo  $Q$  que contiene en su interior a otro cuerpo convexo  $Q_1$ , la probabilidad de que un plano dado al azar que se sabe corta a  $Q$  corte también a  $Q_1$  es igual al cociente  $M_1/M$  de las integrales de curvatura media respectivas.

Esto hizo que las cuestiones interesaran más a los geómetras que a los probabilistas y se fueron obteniendo resultados de puro interés geométrico.

Se hicieron generalizaciones a espacios multidimensionales y a las geometrías no euclidianas. Se justificaron las densidades (8) y (9) por su invariancia respecto del grupo de los movimientos del espacio, con lo que la teoría se vinculó con la teoría de grupos continuos. Se obtuvieron algunas desigualdades, como la clásica desigualdad isoperimétrica, de puro interés geométrico. Se generalizaron los resultados a los espacios complejos. Con todo ello nació la Geometría Integral, de naturaleza esencialmente teórica, sin que se vislumbraran en ella intereses probabilísticos ni prácticos de ninguna clase. El nombre de Geometría Integral fue introducido por W. Blaschke (1885-1962) en una serie de trabajos realizados en su Seminario de Hamburgo entre 1935 y 1939 [7]. Una recopilación de los mismos puede verse en [7]. Sus resultados se vincularon con los grupos de Lie, para fundamentar la invariancia de las densidades de los elementos considerados y con la teoría de las formas diferenciales exteriores, como herramienta de cálculo. Los problemas, originados con el simple problema de la aguja de Buffon, fueron adquiriendo patente de teoría matemática; las posibles aplicaciones no se contemplaban. Como textos de Geometría Integral existen los de Blaschke [7], Stoka [47,48], y Santaló [41,42].

### 3.2. La geometría estocástica

En la década de los años 1960-70 la geometría integral volvió a interesar a los probabilistas, principalmente debido a una serie de importantes trabajos de R. E. Miles [30, 31]. Se volvió a las probabilidades geométricas pero no en su sentido clásico, sino en el marco de los modernos desarrollos de la teoría de las probabilidades, principalmente dentro de los procesos estocásticos. Se conocían los procesos de puntos, por ejemplo, los procesos de Poisson, y se trató de extender el concepto a procesos de rectas o de otros elementos geométricos. Nació así la Geometría Estocástica, cuyas ideas básicas pueden verse en el libro de Harding-Kendall [23] o en el de G. Matheron [29].

Lo interesante es que, junto con las ideas probabilistas, los procesos de elementos geométricos presentan problemas de claro significado geométrico. Para dar un ejemplo, que fue el original, consideremos en el plano un proceso aleatorio de rectas, definido por ciertas condiciones. El plano queda dividido en polígonos convexos, formando lo que se llama un "mosaico aleatorio". La figura 4 representa uno de ellos. Si el proceso depende de un cierto número de parámetros, se presenta el problema de hallar los valores medios o esperanzas matemáticas y, en general, los momentos de algunas características de los polígonos (área  $A$ , perímetro  $L$ , número de lados  $N$ , radio de círculo inscrito, ...) a partir de los parámetros del proceso. El caso más simple es el de un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$  (o sea, un proceso de Poisson de puntos de intensidad  $\lambda$  en la franja  $0 \leq p < \infty, 0 \leq \theta < \pi$ ,

siendo  $p, \theta$  las coordenadas de la recta que figuran en (5). Entonces se calcula, por ejemplo, que los valores medios o esperanzas de  $A, L, N$  valen

$$E(A) = \frac{4}{\pi\lambda^2}, \quad E(L) = \frac{4}{\lambda}, \quad E(N) = 4$$

como puede verse [30, 45, 42].

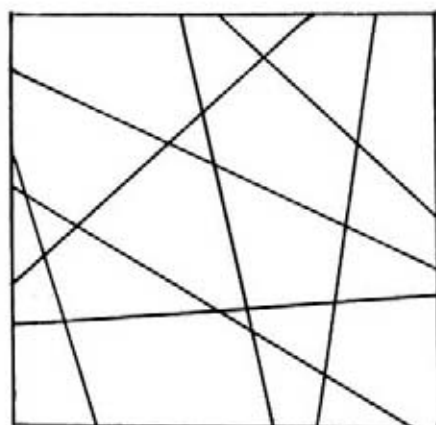


FIGURA 4

De manera más general, un mosaico aleatorio se define como una aplicación cuyo dominio es el espacio muestral  $\Omega$  de un espacio de probabilidad y cuya imagen, para todo elemento de  $\Omega$ , es una partición del plano en polígonos convexos. Las figuras 5 y 6 son ejemplos de mosaicos aleatorios.

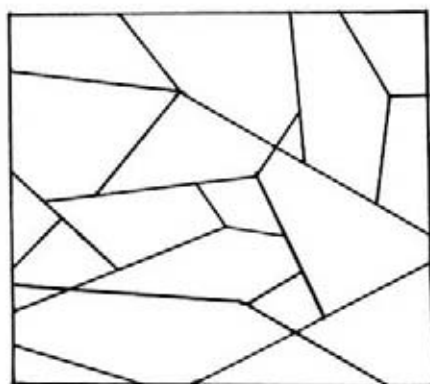


FIGURA 5

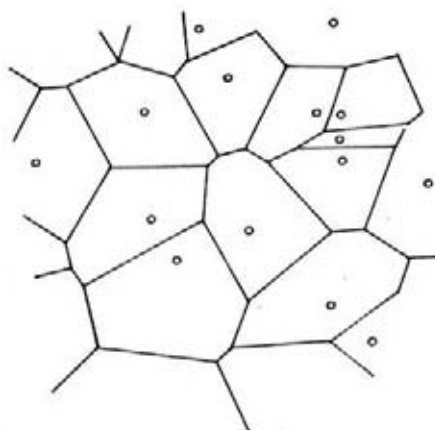


FIGURA 6

El estudio de estos mosaicos ha dado lugar a interesantes estudios. Ver, por ejemplo, R. V. Ambartzumian [1, 2] y R. Cowan [10, 11]. Como modelos clásicos de mosaicos aleatorios, que sirven de ejemplo y punto de partida para otros más generales, se encuentran los de G. Voronoi, W. A. Johnson-R. F. Mehl y E. N. Gilbert. Ver Miles [31]. Para la extensión al espacio, ver Gilbert [21]. Para un tratamiento experimental, ver I. Crain-R. E. Miles [12].

La figura 6 representa un mosaico de Voronoi. Se obtiene tomando un proceso de Poisson de puntos y asignando luego a cada punto todos los puntos del plano que distan de él menos que de cualquier otro punto del proceso.

Si primero se supone dividido el plano por una red de polígonos congruentes que cubren todo el plano sin superponerse (se dice que forman un "teselado") y luego se superpone al mismo un mosaico aleatorio, el resultado es un "mosaico mixto" como, por ejemplo, el de la figura 7. Este tipo de mosaicos han sido poco estudiados.

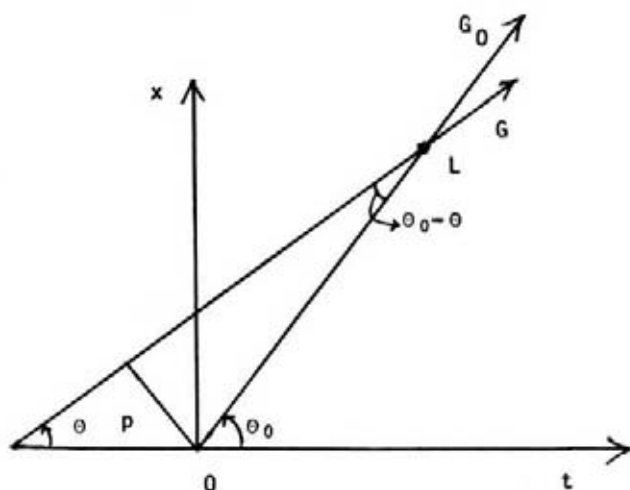


FIGURA 7

También forma parte de la Geometría Estocástica el estudio de procesos de variedades o figuras geométricas más complicadas que rectas y planos. En este sentido están los trabajos [17, 18]. La extensión de la Geometría Estocástica a espacios distintos de los euclidianos parece un campo promisorio en el cual la combinación de geometría y probabilidad puede dar resultados interesantes para ambas disciplinas. Ver un primer trabajo [52].

### 3.3. El problema de Radon

Un problema que al principio no tenía más intención que una simple curiosidad y que luego se transformó en fundamental en el desarrollo de una importante rama de la Geometría Integral fue el considerado por J. Radon (1887-1956) en 1917 [36]. Se trata de ver hasta qué punto una función  $f(x, y)$  definida en el plano, queda determinada por los valores de sus integrales a lo largo de las rectas del mismo. Más exactamente, a partir de una función  $f(x, y)$ , bajo ciertas condiciones muy generales, se pueden calcular las integrales

$$P_f(G) = \int_G f(x, y) ds \quad (17)$$

donde  $s$  indica el elemento de arco sobre la recta  $G$ . Para cada recta  $G$  se tiene una integral de este tipo, de manera que el resultado es una función  $P_f(G)$  definida para todas las rectas del plano. Recíprocamente, dada esta función  $P_f(G)$  para todas las rectas del plano, ¿se podrá determinar  $f(x, y)$ ? La aplicación  $f \rightarrow P_f(G)$  se llama la “transformada de Radón” y este autor demostró que, efectivamente, conocida  $P_f(G)$  para toda  $G$ , se puede determinar  $f(x, y)$  de manera única.

El resultado es que, para cualquier punto  $Q$  del plano, llamando  $F_Q(q)$  al valor medio de  $P_f(G)$  para todas las rectas  $G$  que distan  $q > 0$  de  $Q$ , se tiene

$$f(Q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dF_Q(q)}{q} \quad (18)$$

donde la integral converge a pesar de la aparente singularidad para  $q = 0$ . La demostración de esta fórmula de inversión puede verse en el trabajo original de Radon [36] o en el libro de Gelfand-Graev-Vilenkin [20].

Más adelante vamos a ver las importantes aplicaciones a que este resultado dió lugar, medio siglo después de su descubrimiento por Radon. Aquí sólo queremos mencionar que este problema fue el origen de una rama muy importante de la Geometría Integral que se desarrolló extensamente a partir de los años 50 por Gelfand y Helgason principalmente. Los principales resultados, con sus generalizaciones a los espacios complejos y sus aplicaciones a la representación de grupos, se encuentran en el libro citado de Gelfand y otros [20]. Posteriormente se han encontrado muchas aplicaciones del resultado de Radon y sus generalizaciones, incluso a la prospección petrolera. Ver, por ejemplo, el libro de V. G. Romanov [38].

En el mismo orden de ideas, actualmente está siendo muy estudiado por la cantidad de variantes y resultados curiosos que presenta, el llamado problema de Pompeiu, [35], originado en 1929, pero revalorizado en años recientes.

Se trata de lo siguiente. Dada una función  $f(x, y)$  definida en el plano (con ciertas condiciones) y un dominio  $D$ , se conoce la integral de  $f(x, y)$  extendida a todos los dominios  $gD$ , transformados de  $D$  por los elementos  $g$  de un grupo  $H$  de transformaciones del plano en sí mismo (en general, el grupo de las traslaciones o de los movimientos). ¿Hasta qué punto queda determinada la función  $f(x, y)$  por estas integrales? Se han obtenido al respecto resultados muy curiosos. Por ejemplo: a) Si  $D$  es una elipse, diferente de un círculo, y  $H$  es el grupo de los movimientos, la función  $f(x, y)$  queda determinada (se dice que la familia de las elipses congruentes posee la propiedad de Pompeiu); b) Si  $D$  es el conjunto de 3 cuadrados de lados paralelos a los ejes y longitudes respectivas  $a_1, a_2, a_3$  y el grupo  $H$  es el de las traslaciones,  $f(x, y)$  queda determinada si y sólo si los cocientes  $a_1/a_2, a_2/a_3, a_3/a_1$  son racionales; c) Si  $D$  es un círculo y  $H$  el grupo de los movimientos, la función  $f(x, y)$  no queda determinada, pero sí lo está si  $D$  es un polígono convexo cualquiera.

Muchos resultados interesantes sobre el problema de Pompeiu han sido estudiados por C. Berenstein y otros [4, 5, 6]. Ver también A. Hertle [24]. Se trata, sin duda, de un campo promisorio, aunque nada fácil.

#### 4. APLICACIONES

##### 4.1. La tomografía computerizada por rayos X

La aplicación más espectacular de la Geometría Integral en años recientes, que muestra la extremada precisión a que se puede llegar combinando los progresos de la electrónica, con las predicciones de la matemática, ha sido la llamada tomografía computerizada por rayos X, de uso revolucionario en medicina para la localización de irregularidades en el cuerpo humano. El nombre procede de la palabra griega "tomos" que significa corte o sección.

Hemos visto que Radon en 1917 vió la posibilidad de conocer el interior de un conjunto plano, a partir del conocimiento de lo que pasa a lo largo de sus secciones por rectas. Con el progreso de la tecnología, electrónica y computación, apareció la posibilidad de usar prácticamente esta curiosidad matemática. A. M. Cormack [9] en 1963 observó que interpretando cada recta del problema de Radon como un rayo de un haz de rayos X que atraviesa una área plana  $K$ , que contiene tejidos de distinta densidad cuya distribución se trata de reconstruir, midiendo sus intensidades a la entrada y a la salida, la diferencia dará la cantidad de radiación absorbida al atravesar el área  $K$ , es decir, el valor de la integral (17) correspondiente al rayo considerado. Haciendo esto con "todos" los rayos posibles que atraviesen a  $K$ , se conocerá la función  $P_f(G)$  y entonces la fórmula de inversión de Radon (18) permitirá reconstruir el interior del conjunto plano  $K$  con toda

exactitud. Si se trata de un cuerpo (por ejemplo, la cabeza u otra zona o aún todo el cuerpo humano), se pueden reconstruir de esta manera las distintas secciones, espaciadas a intervalos convenientes, y de ellas deducir toda la estructura interna.

La idea es muy simple y la fórmula (18) de Radon permite asegurar que el problema es posible. Para su utilización práctica faltó, sin embargo, resolver todavía muchos problemas matemáticos y tecnológicos.

Desde el punto de vista matemático, hay que tener en cuenta que las fórmulas (17) y (18) son válidas si se consideran "todas" las rectas del plano, mientras que en la práctica sólo se pueden tener en cuenta un número finito, aunque grande, de ellas. Esto hace que las fórmulas (17) y (18) deban adaptarse al caso finito, para el cual los resultados no pueden ser exactos. Hay que estudiar el número de rayos necesarios y su mejor distribución para obtener una aproximación suficiente. Por otra parte, hay que combinar el número de rayos y las direcciones utilizadas de los mismos, con la facilidad técnica de reconstruir la imagen (realizar la fórmula (18) en un tiempo mínimo). De aquí que se hayan estudiado, y se siguen estudiando, nuevos algoritmos o métodos matemáticos para lograr la máxima precisión en el mínimo tiempo.

Los primeros dispositivos consistían en tomar rayos paralelos en distintas direcciones, espaciadas, por ejemplo, de grado en grado. Tomando 180 direcciones y 160 rayos paralelos para cada una, resultan, para cada sección plana, unas 28.800 rectas o rayos que la atraviesan, número suficientemente grande para lograr una muy buena exactitud. En los aparatos más modernos, los rayos en vez de ser paralelos son en abanico, a partir de una sucesión de focos, que emiten cada uno unos 1.000 rayos. Midiendo la pérdida de intensidad de cada rayo, o sea la integral (17), la fórmula (18), convenientemente adaptada a este caso finito, permite reconstruir el interior de la sección plana. Se hace luego una traslación paralela y se repite la operación con una nueva sección plana. Después de varias secciones, con un total de unos 300.000 rayos lineales que atraviesan el cuerpo, se pueden juntar los resultados de cada sección y, mediante una computadora adecuada, reconstruir todo el cuerpo.

Naturalmente que llevar estos resultados a la práctica, necesita poner en juego los más recientes avances de la electrónica y de la computación. Hacen falta, además, detectores ultrasensibles para medir la pérdida de intensidad de los rayos al atravesar el cuerpo, y luego un sofisticado mecanismo computacional que permita almacenar primero y procesar después, toda la información recibida. La imagen queda registrada en una película que se puede observar directamente y repetir luego las veces necesarias para su estudio.

El primer aparato de esta naturaleza fue patentado por G. N. Hounsfield [25] en 1972. Desde entonces los progresos técnicos han sido enormes. Ac-



tualmente la operación se hace en segundos y la precisión permite detectar perturbaciones insignificantes. La precisión es muy necesaria, pues la densidad de los tejidos de la cabeza, por ejemplo, oscila entre 1,00 y 1,05 y a veces deben detectarse variaciones del orden de 0,005. Los problemas son todavía muchos, pero los progresos y éxitos logrados motivaron que a sus iniciadores, el teórico A. M. Cormack y al práctico G. N. Hounsfield, les fuera concedido el Premio Nobel de Medicina 1979. De haber vivido, el galardón posiblemente hubiera sido compartido por el matemático J. Radon, creador de la base matemática que permitió concebir la posibilidad de tan potente dispositivo.

Desde el punto de vista matemático, muchos datos y resultados sobre el problema se encuentran en los artículos de L. A. Shepp y J. B. Kruskal [43] y K. T. Smith, D. C. Solmon, S. L. Wagner [44] y L. Zalcman [53].

## 4.2. Tráfico en autopistas

La Geometría Estocástica ha sido aplicada al estudio del tráfico en autopistas, o sea, en rutas en que los vehículos circulan en un solo sentido. A partir de una dada distribución del número de vehículos y de sus velocidades, que se suponen constantes para cada vehículo, aunque variables de uno a otro, se trata de estudiar el número de sobrepasos, o sea, la distribución del número de veces que cada vehículo de velocidad  $v_0$  adelanta o es adelantado por otros durante un cierto intervalo de tiempo. El problema ha sido enfocado desde varios puntos de vista (S. Reny [37], G. Weiss-R. Herman [51], F. Garwood [19]). El que más uso hace de la Geometría Estocástica es el adoptado por H. Solomon-P. C. C. Wang [46], reproducido en Solomon [45]. Vamos a dar una idea del mismo.

Tomemos en el plano un sistema de ejes ortogonales, uno horizontal  $t$  (tiempo) y otro vertical  $x$  (espacio). Un vehículo que se mueva con velocidad uniforme  $v$ , se representa por la recta  $G$  de ecuación  $x = vt + x_0$ . Por simplicidad llamaremos  $G$  tanto a la recta como al vehículo que representa. En el gráfico (figura 8) es  $v = \tan \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forma la recta  $G$  con el eje  $t$ . Como sólo vamos a considerar vehículos que se mueven en un mismo sentido, o sea, tales que  $x$  crece al crecer  $t$ , será siempre  $v > 0$  y, por tanto,  $0 \leq \theta < \pi/2$ .

Supongamos las rectas  $G$  orientadas hacia el lado de las  $t$  crecientes. Si dos rectas  $G_1, G_2$  se cortan en un punto  $M$ , significa que los vehículos correspondientes se encuentran en el punto  $X$  del eje  $x$ , o sea, ocupan ambos la misma posición, y el más rápido (en la figura es el  $G_1$ ) se adelanta al más lento (en la figura es el  $G_2$ ).

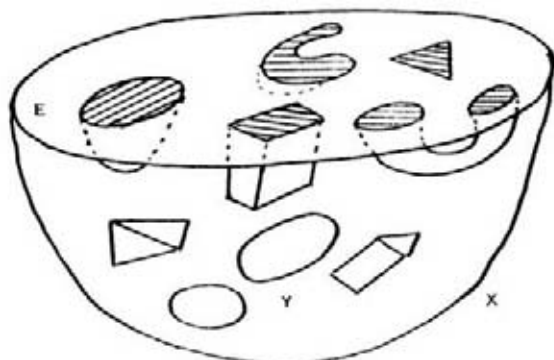


FIGURA 8

Para hacer el estudio de estos sobrepasos, cuya distribución es muy importante en el estudio del tráfico, para calcular, por ejemplo, el número de carriles de la autopista, consideremos un vehículo de prueba  $G_0$ , de velocidad  $v_0 = \tan \theta_0$ , que parte en el instante  $t_0$ , del punto  $x = 0$ . Suponer una cierta distribución para las posiciones y velocidades de los vehículos, significa suponer una cierta distribución para las rectas del plano. Una hipótesis aceptable es que  $p$  esté distribuido uniformemente (densidad  $dp$ ) y  $\theta$  según una cierta densidad de probabilidad  $dH(\theta)$ . Ello equivale a tomar una densidad de rectas  $dG = dp dH(\theta)$  en lugar de (5). Se dice que se trata de rectas anisótropas, en el sentido de que no todas las direcciones son igualmente probables. Aquí quiere decir que no todas las velocidades son igualmente probables, debido a la relación  $v = \tan \theta$ .

Fijado un segmento  $OL$  sobre la recta  $G_0$  (figura 9) y llamando también  $L$  a la longitud del mismo, observemos que para medir las rectas que cortan a  $OL$ , con la densidad  $dp dH(\theta)$  y tales que  $0 \leq \theta < \pi/2$ , para cada  $\theta$  el intervalo de variación de  $p$  es  $0 \leq p < L|\text{sen}(\theta_0 - \theta)|$ . Introduciendo la función

$$B(\theta) = \int_0^\theta |\text{sen}(\theta_0 - \theta)| dH(\theta)$$

resulta que la medida de todas las rectas que cortan a  $OL$  vale  $LB(\pi/2)$ . Si se supone, lo que es un modelo muy plausible, que las rectas (vehículos) siguen un proceso de Poisson de cierta intensidad  $\lambda$ , ello quiere decir que el valor medio de las que cortan al segmento  $OL$  es  $\lambda LB(\pi/2)$ .

Las rectas representativas de vehículos que son sobrepasados por  $G_0$  en el segmento  $OL$ , corresponden a  $0 \leq \theta < \theta_0$ , y, por tanto, su medida es  $LB(\theta_0)$  y formarán otro proceso de Poisson de intensidad  $\lambda'$  tal que

$$\lambda' LB(\pi/2) = \lambda LB(\theta_0),$$

de donde

$$\lambda' = \frac{\lambda B(\theta_0)}{B(\pi/2)}.$$

Las rectas representativas de vehículos que sobrepasan a  $G_0$  formarán un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda'' = \lambda - \lambda'$ .

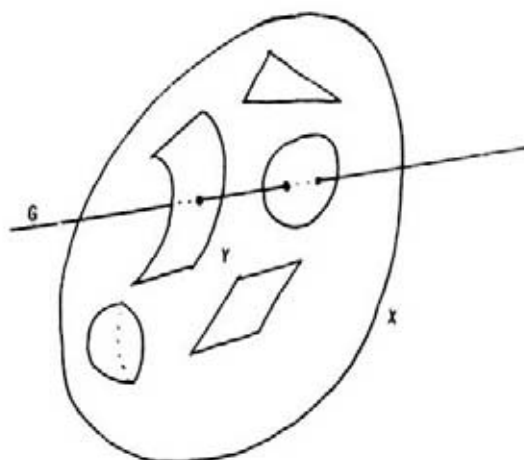


FIGURA 9

Introduciendo las velocidades  $v = \tan \theta$ ,  $v_0 = \tan \theta_0$ , resultan las fórmulas de Solomon-Wang [46]. Hemos expuesto un esquema muy simplificado para ver como la “medida” de conjuntos de rectas del plano puede proporcionar modelos útiles para el estudio del tráfico en autopistas. De ello ha resultado también una justificación de la necesidad de estudiar procesos de rectas anisótropas, o sea, cuya densidad no sea la (5). Para más detalles y bibliografía, ver Solomon [45].

## 5. LA ESTEREOLOGÍA

### 5.1. Historia

Una rama interesante, en que las Geometrías Integral y Estocástica encuentran importantes y naturales aplicaciones, es la llamada Estereología, una rama interdisciplinaria cuyas técnicas sirven a una gran variedad de disciplinas, en apariencia muy alejadas entre sí, como son la biología, la mineralogía y la metalurgia. Algunas fórmulas estereológicas datan del siglo pasado, de trabajos sobre composición de rocas o minerales, pero hace apenas dos décadas que se vió cómo muchos resultados sueltos e inconexos

podían sistematizarse y perfeccionarse si se trataban dentro del marco de la Geometría Integral. La historia es la siguiente:

Durante el Congreso Internacional de Anatomía celebrado en Nueva York en 1960, algunos participantes observaron que varios problemas presentados consistían, esencialmente, en la determinación de estructuras tridimensionales a partir de otras bidimensionales obtenidas por sección o proyección de las primeras. Se observó que el problema se presentaba igualmente en metalurgia y en mineralogía al querer averiguar la composición de aleaciones, rocas o minerales a partir de secciones planas, o en botánica en el estudio de los tejidos de las maderas, también a partir de cortes planos, o en la distribución de cultivos en áreas grandes, a partir de secciones longitudinales. Se organizó una reunión para tratar el tema a la que concurren especialistas de distintas ramas y que tuvo lugar en las sierras de Feldberg (Selva Negra, Alemania) los días 11 y 12 de mayo de 1961. En esta reunión se decidió, el nombre de "Estereología" y se constituyó la Sociedad Internacional de Estereología. Su primer presidente fue Hans Elias (Universidad de Chicago), quien anunció la siguiente definición: "Estereología es un conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o proyecciones sobre planos. Es decir, se trata de una extrapolación del plano al espacio".

A partir de aquella fecha han tenido lugar varios Congresos Internacionales de Estereología, a saber: el primero en Viena (1963), el segundo en Chicago (1967), el tercero en Berna (1971), el cuarto en Washington (1975) y el quinto en Salzburgo (Austria) en 1979. En las actas de estos congresos hay que buscar los principales trabajos sobre Estereología [16]. Ha habido también otras reuniones en las cuales la estereología ha jugado el papel esencial, como el Simposio sobre problemas de Estadística y Probabilidad en Metalurgia (Seattle, Washington, 1971) cuyas Actas fueron publicadas como suplemento especial de la revista *Advances in Applied Probability*, 1972, y la conferencia sobre *Spatial Patterns and Processes* (Canberra, 1977), cuyas actas se publicaron como suplemento de la misma revista (1978).

También hay que mencionar el *Buffon's 200th Anniversary Symposium* (Paris, 1977), cuyas actas se publicaron como *Lecture Notes in Biomathematics*, Springer Verlag, Berlin, 1978.

Como texto básico para estudiar sistemáticamente la Estereología existe el excelente libro de E. E. Underwood [50]. Desde hace unos años la *International Society for Stereology* estableció un convenio con la *Royal Microscopical Society* en virtud del cual el clásico *Journal of Microscopy*, editado por esta última, pasa a ser también órgano de la primera, de modo que desde entonces muchos trabajos sobre Estereología aparecen en esa clásica revista.

Después de esta información histórico-bibliográfica vamos a ver los puntos esenciales, procedentes de la Geometría Integral, sobre los cuales se apoya la Estereología.

## 5.2. Estimación de volúmenes

Supongamos un cuerpo  $X$  del espacio, que contiene en su interior distintos materiales que representaremos siempre por  $Y$ , distribuidos aleatoriamente y de distinta forma y tamaño. Pueden formar, por ejemplo, partículas de diferentes formas, filamentos o hilos en los que predomine una dimensión sobre las demás, láminas o superficies o bien franjas irregulares de estructura topológica variable. El primer caso que vamos a considerar es aquel en que  $Y$  es la unión de dominios tridimensionales, conexos o no, con un volumen total  $V_Y$ . Si  $V_X$  es el volumen total del cuerpo  $X$ , se desea estimar la proporción  $V_Y/V_X$ , o sea, el volumen de  $Y$  por unidad de volumen de  $X$ .

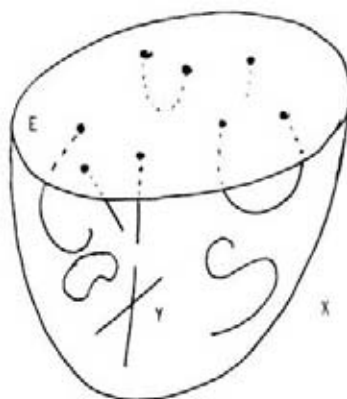


FIGURA 10

Se supone que se puede cortar  $X$  por un plano  $E$  y del conocimiento de la proporción de  $Y$  y  $X$  en la sección plana por  $E$  se quiere estimar  $V_Y/V_X$  (figura 10). La fórmula (14) permite escribir

$$\int \sigma_X dE = 2\pi V_X, \quad \int \sigma_Y dE = 2\pi V_Y \quad (19)$$

donde  $\sigma_X, \sigma_Y$  son las áreas de las intersecciones de  $X$  e  $Y$  con  $E$ .

El plano  $E$  por el cual se corta  $X$  es un plano dado al azar, pero como parece natural elegir este plano de manera tal que la sección con  $X$  sea lo mayor posible, podemos suponer que la densidad de probabilidad, en vez

de ser simplemente  $dE$  (9) sea  $(2\pi V_X)^{-1} \sigma_X dE$ . Con esto, aplicando (19), resulta que la esperanza matemática o valor medio del cociente  $\sigma_Y/\sigma_X$  es

$$E\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right) = \frac{V_Y}{V_X} \quad (20)$$

Esta relación nos dice que como estimador de la proporción  $V_Y/V_X$  se puede tomar el cociente  $\sigma_Y/\sigma_X$ , que se puede medir en la sección plana obtenida. Llamando simbólicamente  $V_V$  a la razón de volúmenes y  $A_A$  a la razón de áreas de una sección plana, el resultado anterior se suele expresar, simbólicamente

$$V_V = A_A \quad (21)$$

Este es, probablemente, el primer resultado estereológico, ya obtenido por A. Delesse en 1848, [15], para determinar la composición de rocas a partir de lo que se observa en sus secciones planas.

Otra manera de estimar la razón de volúmenes puede ser cortar el cuerpo  $X$  por una recta  $G$  y comparar las longitudes de las intersecciones de esta recta con  $Y$  y  $X$  respectivamente. Si  $\sigma_Y, \sigma_X$  son ahora las longitudes de estas intersecciones, tomando como densidad para las rectas del espacio  $\sigma_X dG$ , puesto que es más probable elegir rectas de cuerda grande que rectas de cuerda chica, aplicando (11) resulta que la esperanza matemática del cociente  $\sigma_Y/\sigma_X$  vale también  $E(\sigma_Y/\sigma_X) = V_Y/V_X$  lo que nos dice que también el cociente de longitudes  $\sigma_Y/\sigma_X$  es un estimador de  $V_Y/V_X$ . Simbólicamente esto se escribe

$$V_V = L_L \quad (22)$$

que es otro resultado clásico de estereología, ya conocido por A. Rosiwal en 1898 [39].

### 5.3. Estimación de áreas

Supongamos que el cuerpo  $X$  contiene en su interior ciertas superficies o láminas de área total  $S_Y$ . Queremos estimar el cociente  $S_Y/V_X$ , o sea la cantidad de área por unidad de volumen.

Podemos cortar por planos o por rectas. Cortando por un plano al azar  $E$ , con la densidad de probabilidad  $\sigma_X dE$  (salvo un factor constante) y llamando  $\lambda_Y$  a la longitud total de las curvas de intersección de  $E$  con las superficies  $Y$ , según (13) y (14) resulta

$$E\left(\frac{\lambda_Y}{\sigma_X}\right) = \frac{\pi S_Y}{4 V_X} \quad (23)$$

Es decir,  $S_Y/V_X$  (cantidad de área de  $Y$  por unidad de volumen de  $X$ ) puede estimarse por el producto de  $4/\pi$  por la proporción de la longitud de las curvas de intersección de  $Y$  con  $E$ , por unidad de área de la intersección  $\sigma_X$ . Simbólicamente, se escribe

$$S_V = \frac{4}{\pi} L_A \quad (24)$$

También se puede estimar  $S_Y/V_X$  cortando por una recta  $G$  y comparando el número de puntos de intersección de  $G$  con  $Y$  con la longitud de la cuerda que  $G$  determina en  $X$  (número de puntos por unidad de longitud (figura 11)). Si  $n_Y$  es el número de puntos de intersección de  $G$  con  $Y$ , y  $\sigma_X$  la longitud de la cuerda intersección de  $G$  con  $X$ , tomando las rectas con la densidad de probabilidad  $\sigma_X dG$  (salvo un factor constante), resulta que el valor medio o esperanza del cociente  $n_Y/\sigma_X$  vale [aplicando (10) y (14)]  $E(n_Y/\sigma_X) = (1/2) (S_Y/V_X)$ , lo que se suele escribir, simbólicamente

$$S_V = 2P_L \quad (25)$$

indicando, como es usual en estereología, con  $P_L$  el número de puntos de intersección de  $G$  con  $Y$  por unidad de longitud de la cuerda intersección de  $G$  con  $X$ .

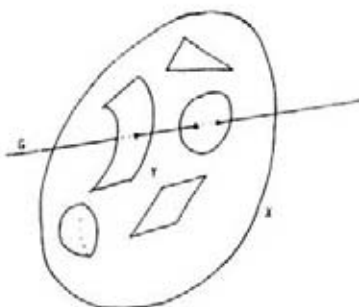


FIGURA 11

Si  $Y$  está constituido por cuerpos convexos y  $N_L$  es el número de ellos cortados por la recta  $G$ , por unidad de longitud de la cuerda, es  $N_L = P_L/2$  y, por tanto, se tiene también

$$S_V = 4N_L \quad (26)$$

#### 5.4. Estimación de longitudes

Supongamos que en el interior del cuerpo  $X$  hay fibras o hilos  $Y$  que en total tengan una longitud  $L_Y$ . Se trata de estimar la longitud de estos hilos por unidad de volumen de  $V$ , o sea,  $L_Y/V_X$  (figura 12).

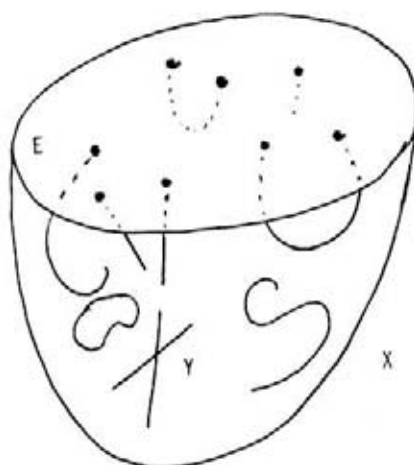


FIGURA 12

Se puede cortar por un plano  $E$  y contar el número de puntos  $N_Y$  de intersección del mismo con los hilos  $Y$ . Tomando como densidad para  $E$  la expresión de siempre,  $\sigma_X dE$ , utilizando (12) y (14) resulta  $E(N_Y/\sigma_X) = (1/2) (L_Y/V_X)$ .

Por tanto, un estimador de  $L_Y/V_X$  es  $2(N_Y/\sigma_X)$ , valor que se calcula en la sección plana de  $X$  con  $E$ . Como  $N_Y/V_X$  es el número de puntos de intersección de las curvas con  $E$ , por unidad de área de la intersección de  $E$  con  $X$ , este resultado se suele escribir

$$L_V = 2P_A \quad (27)$$

### 5.5. Estimación del número de partículas convexas

Supongamos que el cuerpo  $X$  contiene en su interior partículas congruentes entre sí, cuyo conjunto total representaremos por  $Y$ . Para estimar su número por unidad de volumen de  $X$ , se puede estimar el volumen  $V_Y$  o el área  $S_Y$  y luego dividir por el volumen o el área de cada partícula.

Si las partículas son convexas y congruentes y se conoce su integral de curvatura media  $M_0$ , llamando  $N$  al número de ellas que son cortadas por un plano  $E$  tomado al azar, según (15) es

$$\int N dE = N_T M_0 \quad (28)$$

donde la integral está extendida a todos los planos del espacio y  $N_T$  indica el número total de partículas contenidas en  $X$ . Por tanto, tomando para



los planos la densidad de probabilidad  $\sigma_X dE$  se tiene

$$E \left( \frac{N}{\sigma_X} \right) = \frac{N_T M_0}{2\pi V_X} \quad (29)$$

Como  $N/\sigma_X$  es el número de partículas cortadas por  $E$  por unidad de área de la sección de  $E$  con  $X$ , que representaremos por  $N_A$  (cantidad que se mide en la sección) y  $N_T/V_X$  es el número de partículas por unidad de volumen  $N_V$ , se puede escribir

$$N_V = 2\pi \frac{N_A}{M_0} \quad (30)$$

Análogamente, aplicando (13) resulta

$$N_V = \frac{4 L_A}{\pi S_0} \quad (31)$$

donde  $S_0$  es el área de cada partícula (supuesta convexa) y  $L_A$  es la longitud de la intersección del plano  $E$  con las superficies de las partículas, por unidad de área de la sección.

Si los corpúsculos se reducen a segmentos congruentes de longitud  $u_0$ , se sabe que su integral de curvatura media vale  $M_0 = (\pi u_0)$  y, por tanto, para estimar el número de segmentos  $N_V$  por unidad de volumen de  $X$ , la fórmula (30) se escribe

$$N_V = 2 \frac{N_A}{u_0} \quad (32)$$

donde  $N_A$  indica el número de segmentos cortados por el plano de prueba.

Si las partículas son esféricas de radio  $r$ , es  $M_0 = 4\pi r$  y, por tanto,  $N_L = 2\pi r N_V$ . Si son cubos de arista  $a$ , es  $M_0 = 3\pi a$  (aplicando (16)) y, por tanto, se puede escribir  $N_A = (3/2)a N_V$ .

Si en vez de considerar secciones planas de  $X$ , se consideran secciones por una recta, resulta

$$N_V = 4 \frac{N_L}{S_0} \quad (33)$$

siendo  $S_0$  el área de cada partícula y  $N_L$  el número de ellas cortadas por la recta por unidad de longitud de la cuerda de intersección de  $G$  con  $X$ . Si las partículas son cubos de arista  $a$ , es  $S_0 = 6a^2$  y, por tanto,  $N_L = \frac{3}{2}a^2 N_V$ .

Las fórmulas de este párrafo, si las partículas no son congruentes entre sí, valen igualmente, pero hay que sustituir  $M_0$  o  $S_0$  por los valores medios de estas cantidades para las distintas formas y tamaños de las partículas.

### 5.6. Estimación de la integral de curvatura media

La integral de curvatura media, para cuerpos convexos, ya hemos dicho que vale  $2\pi D$ , siendo  $D$  la anchura media del cuerpo. Si se trata de superficies abiertas (con contorno) o bien de superficies cerradas pero no convexas, la integral de curvatura media hay que definirla como la integral de la media aritmética de las curvaturas principales de la superficie en cada punto. Esta última definición permite considerar la integral de curvatura media de  $Y$  por unidad de volumen de  $X$ , aun en el caso en que  $Y$  sea un conjunto de superficies, cerradas o no, convexas o no.

Supongamos el caso en que  $Y$  sea un conjunto de superficies cerradas, pero no necesariamente convexas. La sección por un plano  $E$  será un conjunto de curvas cerradas planas. La "curvatura total" de estas curvas es la suma de los ángulos que giran las tangentes de cada una al recorrer la curva. Si la curva está formada de un solo pedazo la curvatura total vale  $2\pi$ . Si está compuesta de  $N$  pedazos, la curvatura total vale  $2\pi N$ . Son conocidas las fórmulas

$$\int c \, dE = 2\pi M_Y \quad \text{o bien} \quad \int N \, dE = M_Y \quad (34)$$

donde las integraciones pueden considerarse extendidas a todo el plano, puesto que los integrandos son nulos si  $E$  no corta a  $Y$ . Se ha representado por  $c$  la curvatura total de las curvas de la intersección  $E$  con  $Y$ , por  $M_Y$  la integral de curvatura media de todo  $Y$ . De aquí, procediendo como siempre, se deduce

$$E \left( \frac{c}{\sigma_X} \right) = \frac{M_Y}{V_X} \quad \text{o bien} \quad E \left( \frac{N}{\sigma_X} \right) = \frac{M_Y}{2\pi V_X}$$

que se suelen escribir (siendo  $M_V = M_Y/V_X$ ,  $N_A = N/\sigma_X$ )

$$M_V = 2\pi N_A \quad (35)$$

donde  $N_A$  indica el número de curvas cerradas de que se compone la intersección de  $E$  con  $Y$ . Si  $Y$  se compone de partículas convexas de curvatura media  $M_0$ ,  $N_A$  es el número de ellas cortadas por  $E$  y, por tanto, vale (30), con lo cual se puede escribir

$$M_V = N_V M_0 = 2\pi N_V D_0 \quad (36)$$

Si las componentes de  $Y$  son superficies con borde (abiertas), hay que considerarlas como el límite de superficies cerradas que se aplastan hasta que se anula el volumen que limitan.

Por ejemplo, como lo demuestra De Hoff [14], si  $Y$  está formado por tubos delgados o superficies cilíndricas de radio muy pequeño, cuyo eje es

una curva del espacio, por un simple paso al límite se puede probar que  $M_Y = \pi L_Y$ , siendo  $L_Y$  la longitud total del tubo y, por tanto, para tubos delgados, equiparables a hilos, es

$$M_V = \pi L_V \quad (37)$$

siendo  $L_V$  la longitud del tubo por unidad de volumen de  $X$ .

Si  $Y$  consta de superficies o láminas bidimensionales, al considerarlas como límite de cuerpos en que dos dimensiones predominan sobre la tercera (De Hoff las llama "muralia") es  $M_Y = (\pi/2)L_Y$ , siendo  $L_Y$  la longitud del borde de las superficies o láminas y, por tanto, es

$$M_V = \frac{\pi}{2} L_V \quad (38)$$

Para estas cuestiones y otras análogas, ver De Hoff [14] y la bibliografía allí citada.

### 5.7. Estimación de formas

La forma de las partículas o corpúsculos supuestos contenidos en un cuerpo  $X$ , no queda determinada por ninguna de las características  $V, S, M$  que hemos visto cómo se pueden estimar. La forma exacta de las partículas no puede expresarse por un número finito de parámetros, pero se han estudiado algunas combinaciones de  $V, S, M$  que en cierta manera indican si la partícula es más o menos redonda, o tiene forma longitudinal o es más o menos plana. Estas combinaciones son, por ejemplo,  $M^2/S$ ,  $MS/V$  o  $MV/S^2$ , todas las cuales son invariantes por semejanzas. Uno de los más usados es el cociente  $H = MV/S^2$  el cual, con los estimadores anteriores, puede escribirse

$$H = \frac{M_V V_V}{S_V^2} = \frac{\pi^3 N_A A_A}{8 L_A^2} \quad (39)$$

La Estereología utiliza otros muchos parámetros para informar acerca de la distribución de partículas u otros elementos dentro de un cuerpo. Por ejemplo, si al cortar por una recta se designa por  $\lambda$  la distancia media entre partículas, o sea, el recorrido libre medio entre las partículas, la longitud total de la parte de recta no cubierta por las partículas es  $\lambda N_L$  ( $N_L$  = número de partículas cortadas) y, por tanto, según (22), será  $1 - V_V = \lambda N_L$ , de donde

$$\lambda = \frac{1 - V_V}{N_L} \quad (40)$$

A veces interesa la longitud media de las cuerdas de intersección de la recta de prueba con las partículas, o sea, el recorrido libre medio dentro de las partículas. Se suele representar por  $L_3$  y vale

$$L_3 = \frac{L_L}{N_L} \quad (41)$$

Aplicando resultados anteriores se obtiene también

$$\lambda = L_3 \frac{1 - V_V}{V_V L_3} = 4 \frac{V_V}{S_V} \quad (42)$$

Hemos reunido las fórmulas básicas de la Estereología. A partir de ellas se han resuelto, en numerosos trabajos, problemas de detalle, algunos teóricos, otros surgidos de las necesidades prácticas. Hay también muchos problemas probabilísticos, para comparar los estimadores y analizar su grado de confiabilidad. Nuestro objeto ha sido tan sólo observar cómo todas las fórmulas, lo mismo que sus complementos posteriores, quedan sistematizadas y clarificadas desde el punto de vista de la Geometría Integral. Incluso pueden enunciarse en forma mucho más compacta y unificada utilizando el espacio de  $n$  dimensiones. Ver, por ejemplo, el trabajo de Miles [32].

## Referencias

- [1] AMBARTZUMIAN, R.V.: *Random fields of segments and random mosaics on a plane*, Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob, **3**, 369-381.
- [2] AMBARTZUMIAN, R.V.: *Convex polygons and random tessellations*, En el libro "Stochastic Geometry", editado por E. F. Harding y D. G. Kendall, Wiley, New York, 1974.
- [3] AMBARTZUMIAN, R.V.: *The solution of the Buffon-Sylvester problem and Stereology*, Proc. Int. Congress Math Vancouver, 1974, 137-141.
- [4] BERENSTEIN, C.A., ZALCMAN, L.: *Pompeiu's problem on spaces of constant curvature*, J. Analysis Math., **30**, 1976, 113-130.
- [5] BERENSTEIN, C.A., TAYLOR, B.A.: *The three-squares theorem for continuous functions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **63**, 1977, 253-259.
- [6] BERENSTEIN, C.A., ZALCMAN, L.: *Pompeiu's problem on symmetric spaces*, preprint. Dep. Math. Univ. Maryland, 1979.
- [7] BLASCHKE, W.: *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 3th edition, Deutsche Verlag Wiss., Berlin, 1955.
- [8] BUFFON, G.: *Essai d'Arithmétique Morale*, supplement a l'Histoire Naturel, vol. 4, 1777. Oeuvres completes de Buffon (ed. par J. L. Lanessan), Paris, 1884-1885 (14 volúmenes). El "Essai" ha sido reproducido en el libro "Un autre Buffon", de J. L. Binet y J. Roger. Collection Savoir, Hermann, Paris, 1977.

- [9] CORMACK, A.M.: *Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications*, J. Applied Phys., **34**, 1963, 2722-2727.
- [10] COWAN, R.D.: *The use of ergodic theorems in random geometry*, Suppl. Adv. in Appl. Probab., **10**, 1978, 47-57.
- [11] COWAN, R.: *Properties of ergodic random mosaic processes*, Aparecera en Mathem. Nachrichten, 1980.
- [12] CRAIN, I. Y MILES, R.E.: *Monte Carlo estimates of the distribution of the random polygons determined by random lines in a plane*, J. Statist. Computer Simulation., **4**, 1976, 293-325.
- [13] CROFTON, M.W.: *On the theory of local probability applied to straight lines drawn at random in a plane*, Phil. Trans. Royal Soc. London, **148**, 1869, 181-199; *Sur quelques théorèmes de calcul intégrale*, C. R. Acad. Sc. Paris, **68**, 1869, 1469-1470. Artículo de la Palabra "Probabilily" en la Enciclopedia Británica, 9ª edición, 1885.
- [14] DE HOFF, R.T.: *Stereological uses of the area tangent count*, Buffon's 200th Anniversary, Lecture Notes in Biomathematics, N-23, Springer, Berlin, 1978, 99-113.
- [15] DELESE, A.: *Procedé Mécanique pour déterminer la composition des roches*, Annales des Mines, IV Serie, **13**, 1848, 379-388.
- [16] ESTEREOLOGÍA: Las Actas de los Congresos Internacionales de Estereología fueron las siguientes: *I. Proc First Intern. Congress for Stereology*, publicados por la Academia de Medicina de Viena; *II. Stereology*, volumen editado por Hans Elias, Springer Verlag, Berlin, 1967, son los Proc. del 2º Congreso internacional; *III. Stereology 3, Proc. del 3er. Congreso Internacional*, editado por E. R. Weibel y otros, Blackwell Scientl. Publ., Oxford, 1972; *IV. Proc. del 4º Congreso*, editados por E. E. Underwood, U. S. Dep. of Commerce, National Bureau of Standards, Special Publication 431, Washington D.C., 1976.
- [17] FAVA, N. Y SANTALÓ, L.A.: *Plate and line segments processes*, J. Appl. Prob, **14**, 1978, 494-501.
- [18] FAVA, N. Y SANTALÓ, L.A.: *Random processes of Manifolds in  $R^n$* , Zeitschr. fur Wahrscheinlichkeitstheorie, **50**, 1979, 85-96.
- [19] GARWOOD, F.: *The vectorial representation of the frequency of encounters of freely flowing vehicles*, J. Appl. Prob., **11**, 1974, 797-808.
- [20] GELFAND, I.M., GRAEV, M.I. Y VILENKIN, N.Y.: *Integral Geometry and Representation Theory*, "Generalized Functions". Academic Press, New York, **5**, 1966.
- [21] GILBERT, E.N.: *Random subdivision of space into crystals*, Ann. of Math. Statist., **33**, 1962, 958-972.
- [22] GRIDGEMAN, N.T.: *Geometrical probability and the number  $\pi$* , Scripta Mathematica, **25**, 1960, 183-195.
- [23] HARDING, E.F., KENDALL, D.G.: (editors) *Stochastic Geometry*, Wiley, New York, 1974.
- [24] HERTLE, A.: *Zur Radon transformation von Funktionen und Massen. Tesis Doctoral*, Math. Institut, Univ. Nuremberg, 1979.
- [25] HOUNSFIELD, G.N.: *A method of an apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation*, The patent Office. London, 1972, Patent Specification 1283915.
- [26] KENDALL, M.G. Y MORÁN, P.A.P.: *Geometrical probability*, Griffin, London, 1963.

- [27] KOHLAS, J.: *Monte Carlo Simulation in Operations Research*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **63**, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [28] LAPLACE, P.S.: *Théorie Analytique des Probabilités*, Paris, 1812.
- [29] MATHERON, G.: *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New York, 1975.
- [30] MILES, R.E.: *Random polygons determined by random lines in a plane I, II*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **52**, 1964, 901-907, 1157-1160.
- [31] MILES, R.E.: *The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane*, Advances in Math., **10**, 1973, 256-290.
- [32] MILES, R.E.: *Multidimensional perspectives on Stereology*, J. Microscopy, **95**, 1972, 181-195.
- [33] MILES, R.E. Y DAVY, P.: *Precise and general conditions for the validity of a comprehensive set of stereological fundamental formulae*, J. Microscopy, **107**, 1976, 211-226.
- [34] MORÁN, P.A.P.: *The probabilistic basis of stereology*, Adv. Appl. Probab. Special Suppl. (Proc. Symp. Probabilistic Problems in Metallurgy. Seattle, 1971), 1972, 69-91.
- [35] POMPEIU, D.: *Sur Une propriété integrale des fonctions de deux variables réelles*, Bull. Sc. Math. Acad. Royal Belgique, **15**, 1929, 265-269.
- [36] RADON: *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.*, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Natur. Kl., **69**, 1917, 262-277.
- [37] RENY, S.: *On two mathematical models of the traffic on a divided highway*, J. Appl. Prob., **1**, 1964, 311-320.
- [38] ROMANOV, V.G.: *Integral geometry and inverse problems for Hyperbolic Equations*, Springer Tracts in Natural Philosophy, **26**, Springer, Berlin, 1974.
- [39] ROSIWAL, A.: *Über Geometrische Gesteinsanalysen. Ein Einfacher Weg zur Ziffermassigen Feststellung des Quantitätsverhältnisses der Mineralbestandteile Gemengter Gesteine*, Verhandl. der K. K. geologischen Reichsanstalt, **5/6**, 1898, 143.
- [40] SANTALÓ, L.A.: *La probabilidad y sus Aplicaciones*, Editorial Iberoamericana, Buenos Aires, 1955.
- [41] SANTALÓ, L.A.: *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, Paris, 1952.
- [42] SANTALÓ, L.A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [43] SHEPP, L.A. Y KRUSKAL J.B.: *Computerized Tomography: the new Medical X-ray Technology*, Amer. Mathem. Monthly, **85**, 1978, 420-439.
- [44] SMITH, K.T., SOLOMON, D.C., WAGNER, S.L.: *Practical and Mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs*, Bull. Amer. Math. Soc., **83**, 1977, 1227-1270.
- [45] SOLOMON, H.: *Geometric Probability*, Regional Conference Series in Applied Probab. Society for Industrial and Applied Mathem., Philadelphia, 1978.
- [46] SOLOMON, H., WANG, P.C.C.: *Non homogenous Poisson fields of random lines with applications to traffic flows*, Proc. 6th Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probab., III, 1972, 383-400.
- [47] STOKA, M.: *Geometrie Integrala*, Edit. Acad. Rep. Soc. Romania, 1967.

- [48] STOKA, M.: *Geométrie Intégrale*, Mémorial des Sciences Mathématiques, **165**, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [49] ULAM, S.: *The Monte Carlo Method*, J. Amer. Statist. Assoc., **44**, 1949, 335-341.
- [50] UNDERWOOD, E.: *Quantitative Stereology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.
- [51] WEISS, G. Y HERMAN, R.: *Statistical properties of low density traffic*, Quarter. Appl. Math., **20**, 1962, 121-130.
- [52] YÁÑEZ, I. Y SANTALÓ, L.A.: *Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic planes*, J. Appl. Probab., **9**, 1972, 140-157.
- [53] ZALCMAN, L.: *Offbeat Integral Geometry*, Amer. Math. Monthly, **87**, 1980, 161-175.

\* \* \*