SOBRE LA RECTA DE LOS NUEVE PUNTOS

por

JOSÉ YUSTY PITA

El cuadrilátero completo (p. ej. el A B C A′ B′ C′ de la figura 1) tiene la propiedad de que las circunferencias cuyo diámetro son las diagonales tienen el mismo eje radical que pasa por los ortocentros de los cuatro triángulos A B C, A B′ C′, A′ B C′ y A′ B′ C que se forman con los cuatro lados tomados tres a tres.

También se sabe que cada una de las diagonales queda cortada armónicamente por las otras dos y por consiguiente, la circunferencia circunscrita al triángulo M N P formado por las diagonales es ortogonal a las que tienen por diámetro cada una de esas diagonales, por lo que el circuncentro del triángulo M N P está también en el eje radical de aquellas tres

Consideremos uno de los triángulos (p. ej. el A B C). Los puntos del cuarto lado B′ C′ podemos proyectarlos sobre los lados de A B C y cada uno tendrá una circunferencia podaria. Como todas las circunferencias podarias de los puntos de una recta respecto a un triángulo tienen un único centro radical, cuando el punto recorra la recta B′ C′, las circunferencias podarias respecto a A B C tendrán un centro radical S.

Por la misma razón, los puntos de la recta B C tendrán unas circunferencias podarias respecto al triángulo A B′ C′ con un centro radical S_a; las circunferencias podarias del lado C A respecto al triángulo A′ B C′ tendrán su centro radical S_b y las podarias de los puntos de A B respecto a A′ B′ C′ tendrán otro centro radical S_c.

Volviendo a la recta B′ C′ y triángulo A B C, resulta que la podaria de B′ es la circunferencia cuyo diámetro es la diagonal B B′; la podaria de A′ es la que tiene de diámetro la diagonal A A′ y la podaria de C′ la de diámetro C C′.

Si se cambia de triángulo y de cuarto lado, por ejemplo A′ B C′ y recta A C, la podaria de A tiene por diámetro A A′, la de C es la de diámetro C C′ y la de B′ es la de diámetro B B′.

En resumen, cualquiera que sea el triángulo y el cuarto lado, hay tres circunferencias podarias comunes que son las que tienen por diámetro las diagonales. Su eje radical tiene que pasar por los centros radicales S-S_a-S_b-S_c de las circunferencias podarias de los puntos de cada lado respecto al triángulo formado por los otros tres. Con ello se ha demostrado la proposición siguiente:

En un cuadrilátero completo los cuatro centros radicales de las circunferencias podarias de los puntos de un lado respecto al triángulo formado por los otros tres, los cuatro ortocentros de estos triángulos y el circuncentro del triángulo formado por las diagonales, están en línea recta (que pudiera llamarse la recta de los nueve puntos del cuadrilátero completo).

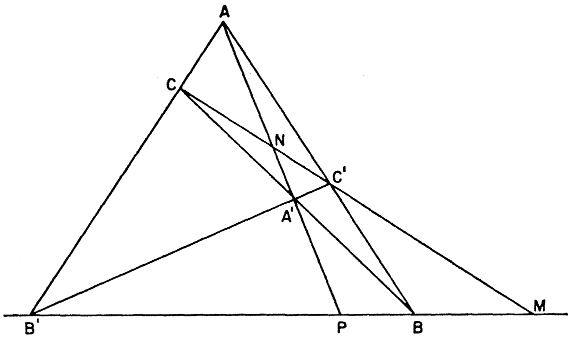

Fig. 1.

NOTA. Como en los textos consultados no se demuestra que, cuando un punto recorre una recta, las circunferencias podarias del punto variable respecto a un triángulo tienen un único centro radical, considero conveniente demostrarlo como sigue:

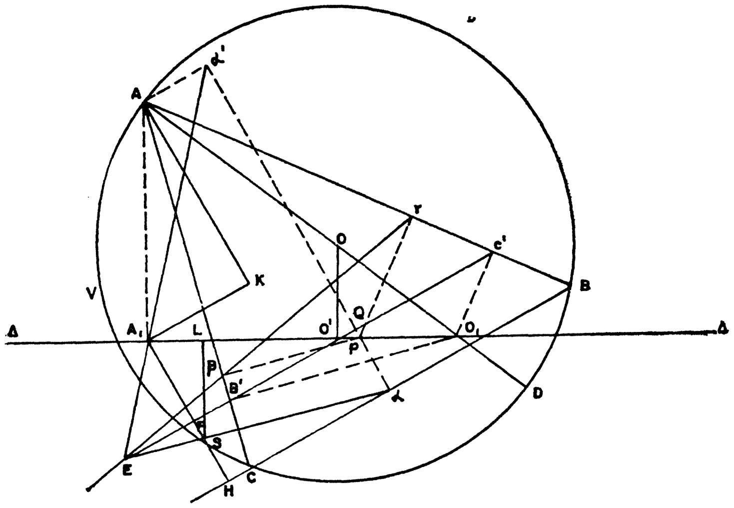

Fig. 2.

Proyectamos un punto cualquiera P de la recta Δ sobre los lados del triángulo A B C en α-β-γ y el vértice A en A, sobre Δ y en α' sobre Pα. La circunferencia de diámetro A P pasa por A_1-β-γ-α'.

El diámetro A D de la circunferencia circunscrita a A B C corta a Δ en el punto O_1 que proyectamos sobre A B en C′ y sobre A C en B′. La circunferencia de diámetro A O_1 pasa por A_1-B′-C′ y por lo tanto A_1 es el punto de Miguel de las rectas

$$AB - AC - \beta\gamma - B'C'$$

y está en las circunferencias circunscritas a $E\gamma C'$ y $E\beta B'$.

En la $E\gamma C'$

$$E\hat{A}_1\gamma = 180 - E\hat{C}'\gamma = 180 - B$$

porque B′ C′ es paralela a B C.

En la de diámetro A P, $\alpha'\hat{A}_1\gamma = \alpha'\hat{P}\gamma$ que tiene sus lados perpendiculares a los de B, luego $\alpha'\hat{A}_1\gamma = B$

$$E\hat{A}_1\gamma + \alpha'\hat{A}_1\gamma = 180 \Rightarrow E - \alpha'$$

y A_1 están alineados.

La circunferencia $A\beta\gamma$ y la podaria $\alpha\beta\gamma$ tienen a $\beta\gamma$ como eje radical, luego la potencia de E respecto a la podaria será

$$P_E = E\beta \times E\gamma = EA_1 \times E\alpha' = E\alpha \times E\alpha'',$$

llamando α'' al segundo corte de la podaria con la recta $E\alpha$.

Trazando por A_1 la perpendicular A_1H al lado B C

$$\frac{FS}{FA_1} = \frac{Q\alpha}{Q\alpha'}$$

como F S es función de tres segmentos de longitud constante, también el segmento F S es constante y el punto S es fijo al moverse P (y en consecuencia E-α y α') siempre que no varíen la recta Δ ni el triángulo A B C.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{E\alpha}{ES} = \dfrac{E\alpha'}{EA_1} = \dfrac{Q\alpha'}{A_1F} \qquad E\alpha'' = \dfrac{EA_1 \times E\alpha'}{E\alpha} \\ \dfrac{E\alpha'}{E\alpha} = \dfrac{EA_1}{ES} \end{array}\right\} E\alpha'' = EA_1 \times \frac{EA_1}{ES} = \frac{EA_1^2}{ES}$$

$$S\alpha'' = E\alpha'' - ES = \frac{EA_1^2}{ES} - ES = \frac{EA_1^2 - ES^2}{ES} = \frac{FA_1^2 - FS^2}{ES} \qquad (1)$$

$$\frac{E\alpha}{Q\alpha'} = \frac{ES}{A_1F} = \frac{S\alpha}{Q\alpha' - A_1F} \qquad S\alpha = \frac{ES(Q\alpha' - A_1F)}{A_1E} \qquad (2)$$

$$(1)\times(2)=P_S=S\alpha\times S\alpha''=\frac{ES(Q\alpha'-A_1F)}{A_1F}\times\frac{A_1F^2-SF^2}{ES}=$$

$$=\frac{(Q\alpha'-A_1F)(A_1F^2-SF^2)}{A_1F}\qquad(3)$$

En esta fórmula (3) que da la potencia del punto S respecto a la podaria $\alpha\beta\gamma$ los segmentos Q α'-A_1 F-S F son constantes para una recta Δ y un triángulo A B C y por lo tanto el punto S es el centro radical de todas las circunferencias podarias de los puntos de la recta Δ respecto al triángulo A B C.

Simplificación de la fórmula (3).

Trazando por A_1 la paralela a B C hasta su encuentro en K con la altura de A y por S la perpendicular S L a la recta Δ tenemos:

$$A_1F^2-SF^2=A_1S(A_1F-FS)\qquad Q\alpha'-A_1F=AK$$

$$\frac{A_1F}{SF}=\frac{Q\alpha'}{Q\alpha}=\frac{AC'}{C'B}=\frac{AO_1}{O_1D}\qquad\frac{A_1F-SF}{A_1F}=\frac{AO_1-O_1D}{AO_1}=$$

$$=\frac{2\cdot OO_1}{AO_1}=\frac{2\cdot OO'}{AA_1}$$

$$P_S=\frac{AK\cdot A_1S\times 2\cdot OO'}{AA_1}\qquad(4)$$

Los triángulos rectángulos A K A_1 y S L A_1 son semejantes por tener paralelos los lados de los ángulos en A y S

$$\frac{A_1S}{AA_1}=\frac{SL}{AK}\qquad SL=\frac{AK\cdot A_1S}{AA_1}$$

y la potencia de S (4) es $2\cdot OO'\times SL$.

La potencia del centro radical de las podarias respecto a cualquiera de ellas es igual al doble del producto de las distancias a la recta Δ del propio centro radical y del circuncentro del triángulo A B C.

Caso particular.

Cuando la recta Δ pasa por el circuncentro de A B C, esa potencia es nula y el centro radical está en todas las podarias, es decir, todas las circunferencias pasan por un punto.

OBSERVACIONES

1. Como las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo y las de su conjungado isogonal son concíclicas. la circunferencia podaria del punto impropio de Δ es la misma que la de su conjugado isogonal γ, que está en la circunferencia circunscrita; por lo tanto esa podaria es la recta de Simson de γ, perpendicular a Δ y pasa por S, es decir, se confunde con la recta S L.

Si trasladamos la recta Δ paralelamente a sí misma, el punto γ, conjugado isogonal de Δ_∞ queda fijo y por lo tanto la recta de Simson de γ. Como el centro radical de las podarias está (figura 3) en la intersección de la recta de Simson con la perpendicular por A_1 al lado opuesto B C, al trasladarse la recta Δ a la posición Δ', la proyección de A se habrá trasladado a A'_1 y S a S', siendo $A_1 A'_1 = L L' = S S'$, es decir, $S L = S' L'$. Cuando la recta Δ se traslada sin variar la dirección la distancia del centro radical a ella permanece constante.

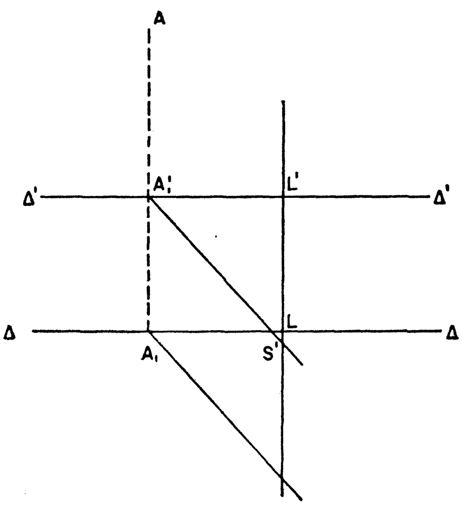

Fig. 3.

2. En la demostración de que el centro radical es único para todas las podarias, habíamos proyectado el vértice A sobre la recta Δ en A_1, y desde este punto levantamos la perpendicular al lado opuesto B C. Como hubiéramos podido tomar cualquiera de los otros dos vértices y desde su proyección sobre Δ levantar la perpendicular sobre el lado opuesto, también estas perpendiculares pasarían por S, lo que permite enunciar el teorema siguiente: Si se proyectan los tres vértices de un triángulo sobre una recta y desde las proyecciones se levantan las perpendiculares al lado opuesto al vértice proyectado, las tres perpendiculares concurren en un punto.

Este teorema puede demostrarse directamente como sigue:

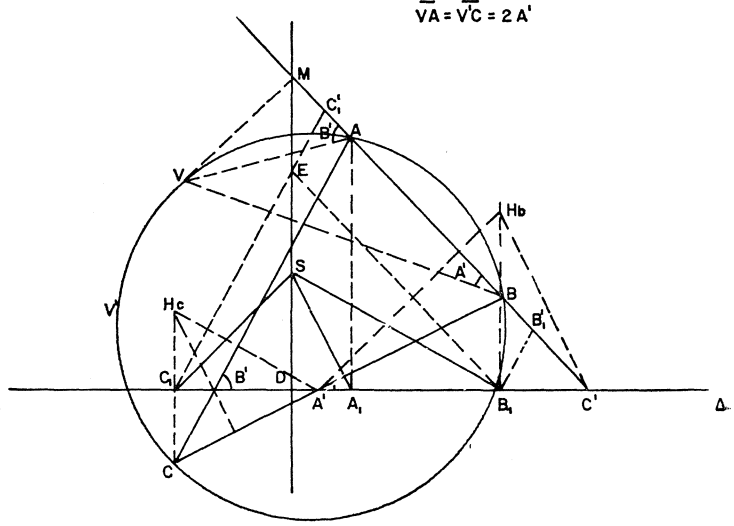

Fig. 4.

Por las proyecciones A_1 y B_1 de A y B sobre la recta Δ levantamos perpendiculares a los lados opuestos B C y C A respectivamente .Estas perpendiculares cortarán a la recta de Simson de V (la M D) en los puntos S_a y S_b.

Los triángulos rectángulos $S_a\,D\,A_1$ y A M V por tener los ángulos $D\,S_a\,A_1$ y $M\,\hat{B}\,V$ iguales a A′ son semejantes.

$$\frac{D\,S_a}{A_1\,D} = \frac{B\,M}{V\,M}$$

También $S_b\,D\,B_1$ y A M V son semejantes por tener

$$D\,\hat{S}_b\,B_1 = M\,\hat{A}\,V = B' \qquad \frac{D\,S_b}{B_1\,D} = \frac{A\,M}{V\,M}$$

La recta Δ y el lado A B cortado por las paralelas M D-A A_1 y B B_1 dan:

$$\frac{B_1\,D}{B\,M} = \frac{A_1\,D}{A\,M} \Rightarrow B_1\,D \times A\,M = A_1\,D \cdot B\,M \Rightarrow D\,S_a = D\,S_b$$

y por lo tanto S_a y S_b son el mismo punto. Por la misma razón la perpendicular a A B desde C_1 concurre en S con A_1 S y B_1 S.

También puede demostrarse directamente que los puntos S están alineados con los ortocentros (la misma figura 4). Tomemos como triángulo el A B C y como recta el lado Δ del cuadrilátero A B C A′ B′ C′.

Tracemos las alturas del triángulo $B_1 S C_1$ que concurren en el ortocentro E; $B_1 E$ será paralela a $A B$ y $C_1 E$ paralela a $A C$ por lo que $B B_1$ y $E M$ serán segmentos iguales. Trazando $B_1 B'_1$ paralela a $A C$, los triángulos $B B_1 B'_1$ y $M E C'_1$ serán iguales y $B B'_1 = M C'_1$. Tracemos las alturas de los triángulos $A' B C'$ y $A' B' C$ que concurren en los ortocentros H_b y H_c respectivamente. Llamemos h_b-h_c-h_s a las distancias de H_b-H_c y S a la recta Δ.

Tenemos que demostrar que

$$\frac{h_b - h_S}{B_1 D} = \frac{h_b - h_c}{B_1 C_1}$$

Los triángulos $H_b B_1 C'$, $S D A_1$ y $H_c C_1 B'$ son semejantes.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{h_b}{B_1 C'} = \dfrac{h_S}{D A_1} = \dfrac{h_b - h_S}{B_1 C' - D A_1} = \\
= \dfrac{h_b - h_S}{(B^1 C' + A_1 B_1) - (D A_1 + A_1 B_1)} = \dfrac{h_b - h_S}{A_1 C' - D B_1} \\
\dfrac{h_b}{B_1 C'} = \dfrac{h_c}{C_1 B'} = \dfrac{h_b - h_c}{B_1 C' - C_1 B'} = \\
= \dfrac{h_b - h_c}{(B_1 C' + B' B_1) - (C_1 B' + B' B_1)} = \dfrac{h_b - h_c}{B' C' - B_1 C_1}
\end{array}\right\} \quad \frac{h_b - h_S}{A_1 C' - D B_1} = \frac{h_b - h_c}{B' C' - B_1 C_1} \qquad \text{(A)}$$

Proyectando A_1, D y B_1 perpendicularmente a Δ sobre $A B$

$$\frac{A_1 C'}{D B_1} = \frac{A C'}{M B}$$

y proyectando B', B_1 y C_1 paralelamente a $A C$

$$\left.\frac{B' C'}{B_1 C_1} = \frac{A C'}{C'_1 B'_1} = \frac{A C'}{M B}\right\} \frac{A_1 C'}{D B_1} = \frac{B' C'}{B_1 C_1} \Longrightarrow \frac{A_1 C' - D B_1}{D B_1} = \frac{B' C' - B_1 C_1}{B_1 C_1}$$

sustituyendo en (A) los denominadores por $D B_1$ y $B_1 C_1$ que son proporcionales a ellos, resulta:

$$\frac{h_b - h_S}{D B_1} = \frac{h_b - h_c}{C_1 B_1}$$

lo que demuestra que H_b, H_c y S están alineados.

Permutando los triángulos del cuadrilátero completo y el cuarto lado, resulta que los cuatro puntos S y los cuatro ortocentros están alineados.