MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO PUNTOS DIDACTICOS CONCRETOS

por

FERNANDO PALANCAR ALMAZÁN

Profesor Agregado del I. N. B. de San Fernando de Henares

I. INTRODUCCIÓN

Este artículo ha surgido a partir de una serie de ideas y planteamientos anotados a lo largo de mi corta experiencia docente.

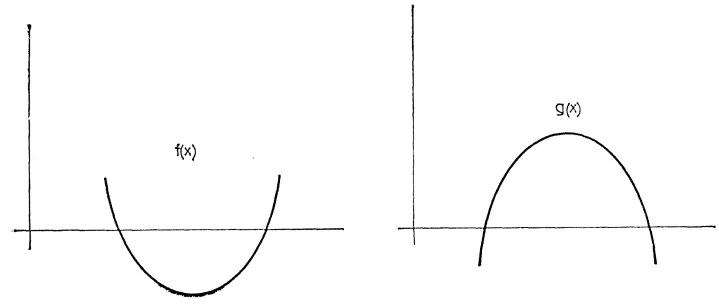
Este conjunto de ideas o propuestas los he agrupado en tres apartados, y sus principales objetivos son homogeneizar definiciones y explicar la materia de cada curso dentro del contexto formado por las matemáticas de todo el Bachillerato, tratando de que el alunmno piense y razone, y por otra parte memorice lo mínimo e imprescindible.

II. DEFINICIONES DISPARES

En este apartado se ven tres casos de definiciones que unos textos dan de una forma y otros de otra contrapuesta. La única pretensión es destacar la importancia de que exista homogeneidad dentro de los textos de Bachillerato.

1) *Concavidad y Convexidad.*

Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas representaciones gráficas sean:



Pues bien, tomando seis textos del COU, entre los más conocidos, miré las definiciones de concavidad y convexidad, y aplicándolas a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ obtuve los cuatro resultados siguientes:

a) Según dos de los textos $f(x)$ es cóncava y $g(x)$ convexa.

b) Para otros dos libros, $f(x)$ es convexa y $g(x)$ cóncava.

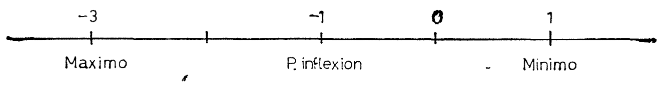
c) Según el quinto texto $f(x)$ es «cóncava hacia + OY» y $g(x)$ «cóncava hacia — OY».

d) Para el último libro consultado, $f(x)$ es «convexa hacía + OY» y $g(x)$ «cóncava hacia + OY».

Supongo que consultando otros libros de texto aparecería alguna definición más.

2) *Intervalos de crecimiento e Intervalos de concavidad.*

Considerando la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$, al estudiar sus máximos, mínimos y puntos de inflexión obtenemos que $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -3$, un mínimo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $x = -1$:



Al definir el crecimiento y decrecimiento de una función algunos textos dan la siguiente definición:

«Una función $g(x)$ es creciente en un intervalo $[a, b]$ cuando para dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \leqslant x_2$, se verifica que $g(x_1) \leqslant g(x_2)$.»

Adoptando esta definición los intervalos de crecimiento de nuestra función $f(x)$ son:

Creciente en los intervalos $]-\infty, -3]$ y $[1, +\infty[$

Decreciente en el intervalo $[-3, 1]$

Otros textos dan la siguiente definición:

«Una función $g(x)$ es creciente en un punto $x = a$, si existe un entorno

$$E(a, \delta) =]a - \delta, a + \delta[,$$

tal que para dos puntos cualesquiera

$$x_1, x_2 \in E(a, \delta), x_1 < x_2,$$

se verifica que $g(x_1) \leqslant g(x_2)$.»

A continuación se generaliza la definición diciendo que una función $g(x)$ es creciente en un intervalo I cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

Adoptando esta segunda definición los intervalos de crecimiento de la función $f(x)$ son:

Creciente en los intevalos $]-\infty, -3[$ y $]1, +\infty[$

Decreciente en el intervalo $]-3, 1[$

Respecto a la concavidad los resultados son análogos, algunos textos definen directamente concavidad en un intervalo $[a, b]$ y otros definen primero concavidad en un intervalo. Según los primeros, los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)$ son $]-\infty, -1]$ y $[-1, +\infty[$ y según los segundos dichos intervalos son $]-\infty, -1[$ y $]-1, +\infty[$.

La forma de unificar ambas definiciones sería conveniente discutirla con cierta profundidad, a mi se me ocurre que una posibilidad es que cuando un texto defina directamente crecimiento, decrecimiento, concavidad o convexidad sobre un intervalo, no lo haga sobre un intervalo cerrado sino que sea sobre un intervalo abierto.

3) *Sucesiones Divergentes.*

Al estudiar el concepto de sucesión divergente en los textos de Bachillerato, encontramos dos definiciones claramente diferenciadas.

Para algunos textos existen dos tipos de sucesiones divergentes, las divergentes hacia $+\infty$ y las divergentes hacia $-\infty$.

Según estos autores la sucesión

$$(a_n) = 2, 1, 5, -1, 8, -3, \dots \text{ [*]}$$

no es una sucesión divergente.

La segunda de las definiciones es la siguiente:

«La sucesión (a_n) es divergente $\Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{R}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \geqslant k,\ \forall\, n \geqslant n_0$.»

Esta definición es más amplia que la primera, según ella, además de las sucesiones divergentes hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$, existen otras sucesiones como la [*] que también son divergentes.

III. Orientación adecuada de los temas

Este apartado lo dedico a dos temas; en primer lugar, la Geometría Analítica, cuyo estudio dentro del Bachillerato, creo que se puede adaptar mejor a los actuales programas, y en segundo lugar las Sucesiones de números reales, que no han tenido tradicionalmente, desde mi punto de vista, el enfoque más adecuado.

1) *Geometría Analítica.*

El estudio de la Geometría Analítica del Plano se inicia en el segundo curso del BUP y se completa en el tercero; por otra parte la Geometría Analítica del Espacio se estudia en el COU.

Dentro de la Geometría del Plano, el concepto más importante es la ecuación de la recta, cuyo estudio comienza con la ecuación vectorial, que da lugar a las ecuaciones paramétricas, y se completa al obtener la ecuación general de la recta. No obstante, el instrumento más importante en el que se basa el estudio de la geometría del plano es la «pendiente» de una recta, puesto que es un instrumento muy práctico y fácil de utilizar por los alumnos cuando se estudia el paralelismo y la perpendicularidad.

Dentro de la Geometría Analítica del Espacio, los dos conceptos más importantes son las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano, cuyo estudio también se inicia con las correspondientes ecuaciones vectoriales que dan lugar a las respectivas ecuaciones paramétricas, en cambio el concepto de «pendiente» desaparece por completo.

Pues bien, teniendo en cuenta que las ecuaciones paramétricas son un punto común de toda la Geometría Analítica, creo que sería conveniente en el segundo curso del BUP, insistir mucho más de lo que se hace habitualmente en las ecuaciones paramétricas de la recta, no solo a nivel teórico sino también a la hora de hacer ejercicios y continuar con este planteamiento en el tercer curso. De esta forma pienso que el estudio de la Geometría Analítica del Espacio en el COU sería muchos más natural y requeriría menos esfuerzo por parte del alumno.

Este planteamiento no quiere decir que se pescinda del concepto de pendiente, de ninguna manera, es un concepto imprescindible dada su practicidad, únicamente pretendo que pendiente, ecuación general, ecuaciones paramétricas y vector de dirección sean conceptos que tengan la misma importancia para el alumno, ya que en mi opinión generalmente no la tienen en la actualidad, pues creo que en muchos casos en Tercero de BUP el alumno se olvida de las ecuaciones paramétricas.

2) *Sucesiones de números reales.*

Este tema se estudia completo en el segundo curso del BUP y en él, desde mi punto de vista, dejando aparte el número «e», podemos considerar dos partes claramente diferenciadas:

La primera parte es, sobre todo, teórica y en ella se introducen los conceptos de sucesión monótona, sucesión acotada y fundamentalmente convergencia y divergencia, y se ponen ejemplos como estos:

Ejemplo 1:

$$(a_n) = 3,\quad 2{,}9,\quad 2{,}09,\quad 2{,}009, \ldots$$

Sucesión convergente cuyo límite es 2.

Ejemplo 2:

$$(a_n) = -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

Sucesión divergente hacia $+\infty$.

La segunda parte está dedicada a los métodos de determinación de límites, es una parte fundamentalmente práctica y en ella se hacen ejercicios como los siguientes:

Ejemplo 3:

$$(a_n) = \left(\frac{3n+1}{n-7}\right)$$

La solución se expresa así

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 3.$$

Ejemplo 4:

$$(a_n) = \left(\frac{3n^2 + 5}{8n - 4} \right)$$

Expresamos la solución escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

Cuando se hacen exámenes, los ejercicios de la segunda parte aparecen mucho más que los de la primera y lo que es más importante, pienso que el alumno resuelve los ejercicios de la segunda parte de una forma mecánica y en pocos casos se da cuenta de que la sucesión del Ejemplo 3 cumple la definición de sucesión convergente, vista en la primera parte y es, en este sentido, absolutamente análoga a la sucesión del Ejemplo 1.

Resumiendo, en mi opinión, se crea un esquema en la mente de la mayoría de los alumnos, en el cual no existe relación aparente entre las dos partes del tema y además los ejercicios de la segunda parte se resuelven mecánicamente.

El modo de evitar esto sería un interesante tema de discusión, yo por mi parte trato de hacerlo haciendo más híncapié en los conceptos teóricos y proponiendo ejercicios como éste:

«Dadas las siguientes sucesiones, indicar si son convergentes, divergentes u oscilantes, especificando el límite si son convergentes»:

$$(a_n) = 2,\ 4,\ 2{,}9,\ 3{,}2,\ 2{,}99,\ 3{,}02,\ 2{,}999,\ 3{,}002, \ldots$$

$$(b_n) = (\sqrt{9n^2 - 4n} - 3n) \qquad (c_n) = \left(\frac{\sqrt{2n^3 + 4n - 1}}{n^2 - 3n + 5} \right)$$

$$(d_n) = 2, 5, 2, 7, 2, 9, 2, 11, \ldots$$

IV. Planteamientos didácticos

Este apartado está dedicado a la exposión de cinco propuestas didácticas sobre otros tantos temas muy concretos.

1) *División de polinomios.*

Teniendo en cuenta que al llegar a este tema, el alumno sabe efectuar divisiones numéricas, lo único que propongo es que al alumno le quede muy claro que dividir polinomios es completamente análogo a dividir números.

Si consideramos una división de polinomios como por ejemplo:

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -2x^2 & +3x & +5 & 2x^2 - 3 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & & +6x & & 2x - 1 \\
\cline{1-4}
& -2x^2 & +9x & +5 & \\
& +2x^2 & & -3 & \\
\cline{2-4}
& & 9x & +2 & \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

El alumno no encuentra dificultades en aprender a efectuarla, ahora bien, dudo que se dé cuenta de que es exactamente igual que una división numérica. Para ello considerando

$$\begin{array}{r|l} 2675 & 34 \\ \cline{2-2} 295 & 78 \\ \underline{23} & \end{array}$$

una división númerica, se puede indicar que esta división se podría escribir más detalladamente de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 2665 & 34 \\ \cline{2-2} -238 & 78 \\ \hline 295 & \\ -273 & \\ \hline \underline{23} & \end{array}$$

Así el alumno entiende que ambas divisiones son análogas y en su mente se situarán como una misma cosa, no como dos diferentes, y esto me parece muy conveniente.

2) *Descomposición factorial de polinomios.*

Como continuación del tema anterior, no me refiero al aprendizaje de la descomposición factorial, que no suele plantear dificultades al alumno, sino a que éste sea consciente de que ambas descomposiciones factoriales, la polinómica y la numérica, son absolutamente análogas.

Considerando la descomposición factorial del polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9,$$

la solución se anotará de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -11 & 11 & 15 & -9 \\ -1 & & -2 & 13 & -24 & 9 \\ \hline & 2 & -13 & 24 & -9 & 0 \\ 3 & & 6 & -21 & 9 & \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 & \\ 3 & & 6 & -3 & & \\ \hline & 2 & -1 & 0 & & \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(x-3)^2(2x-1).$$

Si consideramos la descomposición factorial del número 126, sería

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Se puede poner de manifiesto la analogía, expresando la descomposición del polinomio P (x) de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|r} 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9 & x + 1 \\ 2x^3 - 13x^2 + 24x - 9 & x - 3 \\ 2x_2 - 7x + 3 & x - 3 \\ 2x - 1 & 2x - 1 \\ 1 & \end{array}$$

3) *Correspondencias, Aplicaciones y Funciones.*

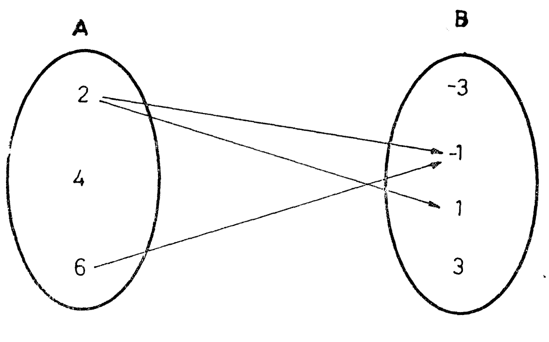
El concepto de función suele presentar dificultades para el alumno en su introducción teórica inicial; aquí propongo una introducción que parte del concepto de correspondencia y pretende unir la definición teórica de función y la parte más práctica, que son las representaciones gráficas cartesianas.

Correspondencia.—Dados dos conjuntos A y B, llamamos correspondencia f del conjunto A en el conjunto B, a cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir $f \subset A \times B$ y lo denotamos $f : A \longrightarrow B$, A recibe el nombre de conjunto inicial de la correspondencia f y B conjunto final.

Ejemplo 1:

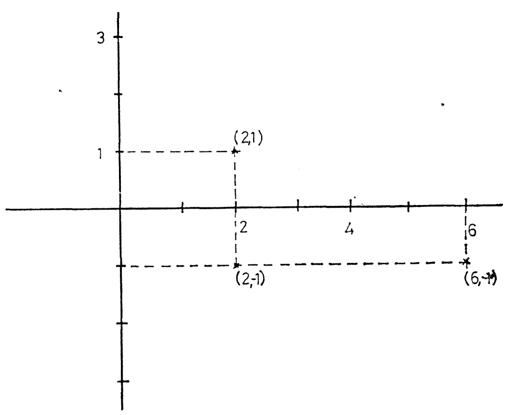
$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{-3, -1, 1, 3\}$$
$$f = \{(2, -1),\ (2, 1),\ (6, -1)\} \qquad f \subset A \times B$$

Las correspondencias se pueden representar gráficamente de dos formas, mediante el diagrama de flechas y mediante el diagrama cartesiano.



En el diagrama de flechas cada par de la correspondencia viene representado por una flecha y por tanto aparecen tantas flechas como pares contiene la correspondencia.

En el diagrama cartesiano cada par de la correspondencia viene representado por un punto y por ello aparecen tantos puntos como pares contienen la correspondencia. El conjunto inicial siempre lo representamos en el eje X y el conjunto final en el eje Y.

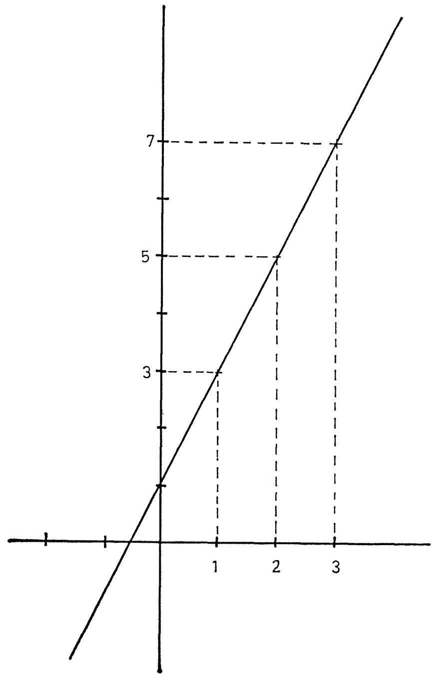


Cuando, como en el Ejemplo 1, el par $(2, -1) \in f$ decimos que -1 es imagen de 2. En este ejemplo vemos que 2 tiene dos imágenes, 4 no tiene ninguna y 6 tiene una imagen.

Aplicaciones.—Una correspondencia $f : A \longrightarrow B$, decimos que es una aplicación, se verifica que todos los elementos del conjunto inicial A, tienen imagen y además tienen una sola. Aquí se introducirían los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad.

Funciones.—Una función real es una aplicación en la que el conjunto final es el conjunto $\mathbb{R}$. Una función de variable real es una aplicación en la que el conjunto inicial A es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una aplicación que cumple ambas cosas se denomina función real de variable real $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$.

A partir de aquí hay que indicarle al alumno que las funciones, como correspondencias que son, son conjuntos de pares $f \subset A \times \mathbb{R}$, pero tienen la particularidad de ser conjuntos formados generalmente por *infinitos pares* y de hecho, es de donde parten las consecuencias más importantes. La primera es que no podemos escribir todos los pares, como hacíamos en el Ejemplo 1, porque son infinitos. La segunda es que no podemos utilizar el diagrama de flechas para representar gráficamente las funciones porque tendríamos que dibujar infinitas flechas. Ya solo queda que el alumno entienda que, aunque parece en principio que tampoco vamos a poder utilizar el diagrama cartesiano, por la imposibilidad de dibujar infinitos puntos, en el caso particular de que estos estén situados a lo largo de una línea (recta o curva), si que podemos hacerlo y este va a ser el caso general.



Ejemplo 2:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \subset A \times \mathbb{R}$$

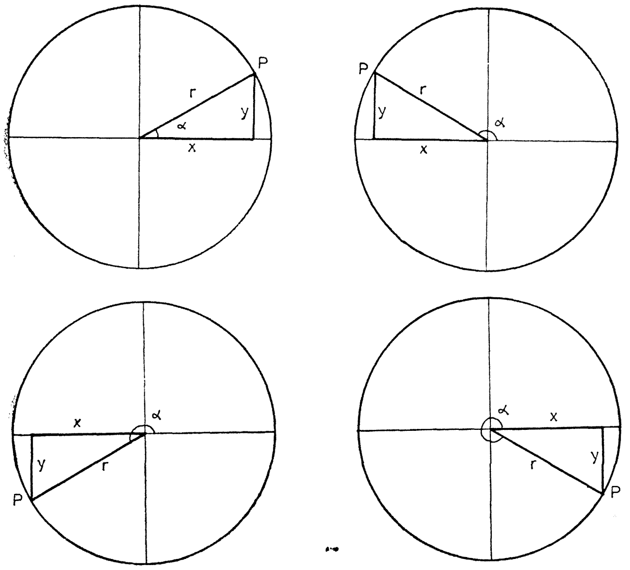
$$f = \{(1,3), (2,5), (3,7), \ldots\}$$

Quiero terminar este tema indicando que en algunos textos podemos ver escrito lo siguiente: «Dada la función $x = y^2, \ldots$», pues bien, $x = y^2$ no es una función porque no cumple la condición de ser aplicación. Esto es un pequeño detalle pero que, creo debemos cuidar pues puede confundir a nuestros alumnos de Bachillerato.

4) *Definición de las razones trigonométricas.*

Al definir las razones trigonométricas, me parece conveniente hacerlo de tal forma que el alumno obtenga los signos de las razones en cada cuadrante inmediatamente, a partir de la definición, y esto es lo que pretendo con la siguiente definición:

Considerando una circunferencia de radio r, dado un ángulo α obtenemos sobre la circunfencia un punto P de coordenadas (x, y).



Definimos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{r}{y}$$

Como en cada cuadrante el alumno conoce perfectamente los signos de x e y por ser las coordenadas del punto P y además r es siempre un número positivo por ser el radio de la circunferencia, entonces deduce inmediatamente los signos de cada una de las razones en cada cuadrante.

5) *Sistemas de ecuaciones lineales.*

Al estudiar la resolución de los sistemas de ecuaciones linales en el COU, se llega a la conclusión de que al resolver un sistema existen tres posibilidades:

a) Que el sistema no tenga ninguna solución, en cuyo caso decimos que es un sistema incompatible.

b) Que el sistema tenga una única solución y decimos que es un sístema compatible determinado.

c) Que el sistema tenga infinitas soluciones, en cuyo caso decimos que el sistema es compatible indeterminado.

A continuación y como caso partícular se estudian los sistemas homogéneos y la conclusión es que, en este caso, la primera posibilidad a) nunca se da, los sistemas homogéneos son siempre compatibles .

Pues bien, algunos textos cambian la nomenclatura con los sistemas homogéneos, llaman incompatible al sistema que solamente tiene la solución trivial y compatible al sistema homogéneo que tiene infinitas soluciones. Desde mi punto de vista esto es un error, pues no tiene ninguna ventaja y en cambio puede confundir a los alumnos al utilizar la misma palabra (incompatible) en dos situaciones contrapuestas. Creo que es mucho más natural que el alumno vea los sistemas homogéneos como lo que son, un caso particular, llame a los sistemas homogéneos con solución única compatibles determinados, a los que tengan infinitas soluciones compatibles indeterminados y sepa que no existen sistemas homogéneos incompatibles. Además, lo más importante es que el alumno sepa cuando hay infinitas, una o ninguna solución, las palabras compatible, incompatible, determinado e indeterminado son algo secundario e incluso se podría prescindir de ellas. Resumiendo, tratemos de no confundir a nuestros alumnos con algo que realmente es secundario.