Si el origen es un cloro, resultan también cloros las esquinas 3, 5 y 6.

Por lo mismo son sodios las esquinas 1, 2, 4 y 7, o sea, las que en su numeración contienen un número impar de 1:

(oo1), (o1o), (1oo) y (111).

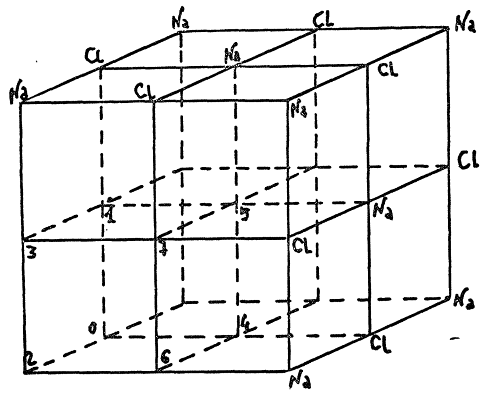

Fig. 1.

Es evidente que en nuestra descripción consideramos vértice o esquina el centro de cada átomo.

1. Construcción del espacio vectorial

a) *Cuerpo.*

Tomamos como cuerpo básico el conjunto $\pounds = \{o, 1\}$ con las operaciones $+$ y $.$ descritas por las tablas:

$+$	o	1
o	o	1
1	1	o

$\cdot$	o	1
o	o	o
1	o	1

Como vemos son asociativas y conmutativas.

El elemento neutro es el o, y el elemento unidad es el 1.

Ambos elementos son opuestos de sí mismos $(1 + 1 = o)$.

El 1 es su propio inverso, y no existen divisores del o.

La propiedad distributiva es fácilmente comprobable:

$$1 \cdot (1 + o) = 1 \cdot 1 = 1 + o = 1; \quad 1 \cdot (1 + 1) = 1 + 1 = o.$$

b) *Espacio vectorial.*

Tomamos como espacio vectorial el conjunto \$ = £ × £ × £

\$ = { (ooo), (ool), (olo), (oll), (loo), (lol), (llo), (111) }

con las operaciones & y . tales que para toda terna de \$:

$$(a\ b\ c)\ \&\ (d\ e\ f) = (a + d \quad b + e \quad c + f)$$
$$1 \cdot (a\ b\ c) = (a\ b\ c)\,; \qquad o \cdot (a\ b\ c) = (ooo).$$

Designando cada terna por su equivalente cifra decimal, las operaciones se describen en las tablas siguientes:

&	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	0	1	2	3
5	4	7	6	1	0	3	2
6	7	4	5	2	3	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

•	o	1
1	0	1
2	0	2
3	0	3
4	0	4
5	0	5
6	0	6
7	0	7

Se comprueban directamente las propiedades asociativa y conmutativa para la operación &.

El neutro es el elemento 0 = (ooo).

El opuesto a cada elemento es el mismo elemento.

Siendo A y B dos cualesquiera de las ocho ternas:

$$1 \cdot A = A\,;\quad 1 \cdot (1 \cdot A) = 1 \cdot A = (1 \cdot 1) \ \cdot A = A\,; \quad 1 \cdot (A\ \&\ B) = 1 \cdot A\ \&\ 1 \cdot B$$

y

$$(1 + 1) \cdot A = o \cdot A = 1 \cdot A\ \&\ 1 \cdot A = A\ \&\ A = 0.$$

Análogamente para el o.

2. Construcción del espacio afín

a) *Vector libre.*

Tenemos el cubo descrito estructurado como Espacio Vectorial compuesto únicamente de ocho puntos siendo origen el 0 = (ooo).

Llamamos Vector Libre al par formado por el origen y otro punto de los ocho del cubo-espacio vectorial.

Los vectores:

$$0\text{-}4 = 4 = (1oo)\,; \quad 0\text{-}2 = 2 = (o1o)\,; \quad 0\text{-}1 = 1 = (oo1)$$

generan todos los demás por medio de las operaciones descritas. Por ejemplo:

$$6 = (11o) = 1 \cdot (1oo) \,\&\, 1 \cdot (o1o) \,\&\, o \cdot (oo1) = 0\text{-}6.$$

Cualquiera de los ocho vectores se escribe:

$$A = t \cdot 4 \,\&\, m \cdot 2 \,\&\, n \cdot 1 \quad \text{con} \quad t, m, n = o \quad \text{ó } 1.$$

Diremos que los vectores 4, 2 y 1 forman una base.

b) *Vector fijo.*

Las veintiocho parejas que se pueden formar con los ocho puntos las llamaremos vectores fijos.

Cada vector libre distinto del (ooo) es representante de cuatro vectores fijos según la tabla:

0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6	0-7
2-3	1-3	1-2	1-5	1-4	1-7	1-6
4-5	4-6	4-7	2-6	2-7	2-4	2-5
6-7	5-7	5-6	3-7	3-6	3-5	3-4

Por tanto:

1.º Cada vector libre corresponde a un punto del cubo cuya terna la forman los coeficientes t, m y n, que llamaremos:

Coordenadas del vector en la base elegida: 4, 2, 1.

2.º El vector libre representante de un vector fijo se obtiene sumando los los puntos del vector fijo por la operación & (o bien restando, pues según la estructura definida sumar y restar resultan la misma operación pues cada punto es opuesto a sí mismo).

c) *Rectas.*

Llamaremos recta k) al conjunto de vectores que se obtiene operando uno determinado $(a\ b\ c)$ consigo mismo.

Siendo $X = (x\ y\ z)$ y $P = (p\ q\ r)$ dos puntos del cubo-espacio que definen un vector de k), resulta:

$$X \;\&\; P = t \,.\, A = (x\ y\ z) \;\&\; (p\ q\ r) = t \,.\, (a\ b\ c) \qquad \text{siendo} \qquad t = 0 \quad \text{ó} \quad t = 1.$$

Se llama a P vector de posición y a A vector de dirección.
Cada recta sólo puede contener dos puntos.
Por cada punto pasan siete rectas.
Por tanto, hay en total $\binom{8}{2} = 28$ rectas.

d) *Planos.*

Llamaremos plano K) al conjunto de vectores generados por dos vectores que no estén en la misma recta:

$$A = (a\ b\ c) \quad \text{y} \quad D = (d\ e\ f).$$

Análogamente a como hicimos con la recta k) obtendremos:

$$X \;\&\; P = t \,.\, A \;\&\; s \,.\, D = (x\ y\ z) \;\&\; (p\ q\ r) = t \,.\, (a\ b\ c) \;\&\; s \,.\, (d\ e\ f) \qquad (1)$$

siendo $s, t =$ o ó 1.
d.1) La ecuación (1) se puede escribir:

$$m \,.\, x + n \,.\, y + g \,.\, z + h = \mathrm{o}$$

donde m, n, g, h son o ó 1.
Por tanto, escogiendo m, n, g y h como o ó como 1 resultarían dieciséis planos, pero realmente son 14 planos, pues:

$$\mathrm{o} \,.\, x + \mathrm{o} \,.\, y + \mathrm{o} \,.\, z + \mathrm{o} = \mathrm{o} \quad \text{y} \quad \mathrm{o} \,.\, x + \mathrm{o} \,.\, y + \mathrm{o} \,.\, z = 1$$

no son planos.
d.2) Los puntos $(x\ y\ z)$ pertenecientes a un plano son según (1)

$$(x\ y\ z) = (p\ q\ r) \;\&\; t \,.\, (a\ b\ c) \;\&\; s \,.\, (d\ e\ f).$$

Por tanto, cada plano contiene únicamente cuatro puntos:

$(p\ q\ r)$ correspondiente a los valores $t =$ o y $s =$ o.
$(p\ q\ r)$ & $(a\ b\ c) = (p + a\quad q + b\quad r + c)$ cuando $t = 1$ y $s =$ o.
$(p\ q\ r)$ & $(d\ e\ f) = (p + d\quad q + e\quad r + f)$ cuando $t =$ o y $s = 1$.
$(p\ q\ r)$ & $(a\ b\ c)$ & $(d\ e\ f) = (p + a + d\quad q + b + e\quad r + c + f)$ si $t = 1$ y $s = 1$.

d.3) Contando ahora el número de planos:

Cada tres puntos definen un plano, luego tendremos:

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ definiciones (ecuaciones) del mismo plano.}$$

Cada tres puntos forman una definición, así tendremos:

$$\binom{8}{3} = 56 \text{ definiciones posibles en todo el espacio.}$$

Por tanto el número total de planos es $\frac{56}{4} = 14$.

d.4) De los 14 planos, siete los llamaremos vectoriales: son los que contienen el punto $0 = (ooo)$ y son subespacios vectoriales del cubo-espacio.

Los otros siete los llamaremos planos afines.

d.5) Los planos vienen determinados en la siguiente tabla:

Ecuación	Puntos	Coeficientes (mng)	Vector
$x + y + z = o$	0, 6, 5, 3	(111)	7
$x + y + z = 1$	1, 2, 4, 7	(111)	7
$x + y = o$	0, 6, 1, 7	(11o)	6
$x + y = 1$	2, 4, 3, 5	(11o)	6
$x + z = o$	0, 5, 7, 2	(1o1)	5
$x + z = 1$	1, 4, 3, 6	(1o1)	5
$x = o$	0, 3, 2, 1	(1oo)	4
$x = 1$	4, 5, 6, 7	(1oo)	4
$y + z = o$	0, 3, 4, 7	(o11)	3
$y + z = 1$	6, 5, 2, 1	(o11)	3
$y = o$	0, 1, 4, 5	(o1o)	2
$y = 1$	2, 3, 6, 7	(o1o)	2
$z = o$	0, 4, 2, 6	(oo1)	1
$z = 1$	1, 3, 5, 7	(oo1)	1

Los planos de vector 7 son «irregulares» en el sentido de que sus puntos no están situados según la idea euclídea de plano.

Se agrupan de dos en dos ya que existen dos planos con el mismo vector de coeficientes, uno vectorial y el otro su correspondiente «paralelo» afín.

Cada plano contiene seis rectas, puesto que el plano lo forman cuatro puntos y cada recta contiene dos:

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Los vectores contenidos en un plano afín, son naturalmente los vectores «trasladados» de su correspondiente plano vectorial.

Por ejemplo, los planos: $x + y = 0$, $x + y = 1$, $2 \& 4 = 6$, $2 \& 3 = 1$, $2 \& 5 = 7$, $4 \& 3 = 7$, $4 \& 5 = 1$, etc.

3. Interpretación del cubo-espacio afín

a) *Planos.*

Según hemos designado los átomos del cubo, los doce últimos planos de la lista contienen dos átomos de sodio y dos de cloro cada uno. A estos doce planos los llamaremos regulares.

Los dos primeros planos, de vector 7, contienen únicamente átomos de una clase. Los llamaremos irregulares.

A los planos regulares se les podría considerar como planos de cohesión, ya que por medios mecánicos la sal sólo puede trocearse según estos planos, y por tanto, por mucho que la machaquemos seguirá siendo sal común (NaCl) con su color y sabor propios.

A los planos irregulares se les podría considerar como planos de disociación, pues basta disolver la sal en agua para que queden separados los planos de sodios por un lado y los de cloros por otro.

Sin embargo no se separan en la disolución los puntos, pues de ser así bastaría «colar» o filtrar con algún tipo de membrana la disolución para obtener el cloro por un lado y el sodio por otro.

b) *Rectas.*

De las seis rectas que contiene un plano regular cuatro están formadas por un cloro y un sodio, una está formada por dos cloros y otra por dos sodios. Estas dos rectas podríamos llamarlas elementales. Cl ó Na. A las cuatro primeras podríamos llamarlas moleculares: NaCl.

Para partir los planos regulares en rectas moleculares se debe calentar la sal a 800º C, que es lo que observamos cuando funde. Si se deja enfriar la pasta no recupera su estructura cristalina, pues estas rectas no constituyen base del espacio vectorial descrito y así no pueden generar los demás vectores. A pesar de todo la pasta sigue con sabor a sal pero menos intenso.

c) *Puntos.*

La separación del espacio en rectas elementales o en puntos se sigue por métodos análogos.

Si hemos separado los planos irregulares, o sea tenemos los planos de cloro por un lado y los de sodio por otro la electrolisis permite obtener las rectas vectoriales, o sea el cloro.

Los sodios no constituyen un plano vectorial, sino afín, lo que no les permitiría agruparse en rectas de dos puntos. Cada punto formaría su propio espacio.

Dado que las rectas constituyen un subespacio, se podrían obtener reestructurándolas por electrolisis a partir de la pasta fundida, separando primero los puntos que se reagrupan en los electrodos. Insistimos en que es una interpretación.

d) *Consecuencias.*

Observemos que el estado natural del cristal de NaCl es el espacio descrito. Para partirle en sus subespacios hay que suministrarle energía. Así para disolverse, o sea para partirse en planos irregulares absorbe 1.300 calorías por cada molécula gramo.

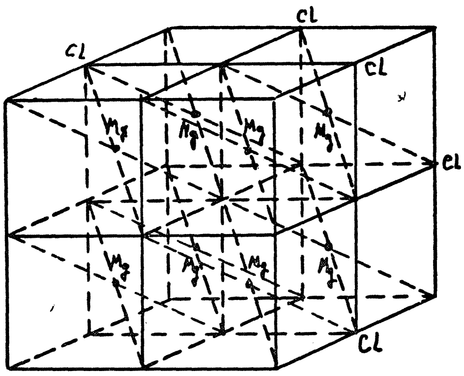

Fig. 2.

El poliedro es pues más estable que el polígono (plano).

El polígono lo es más que el segmento (dos puntos).

El caso de puntos separados sólo se da con ciertas condiciones muy favorables.

d.1) Todos los puntos o ternas del espacio vectorial que hemos definido están ocupados por un átomo material y por tanto no admite la inclusión de otros átomos que ocupasen los puntos posibles del espacio. La creencia común de que la NaCl engorda absorbiendo agua, podría refutarse indicando que se necesitaría algún punto del espacio vectorial o afín teórico que estuviera desocupado donde incluir ese agua. Son las sales mezcladas con el NaCl las que se humedecen. El cloruro sódico simplemente se disuelve.

Por ejemplo, el cloruro magnésico (fig. 2) cuya estructura permite definir un espacio vectorial de dieciséis puntos, de los que seis estarían desocupados. Podríamos incluir dos moléculas de agua.

Naturalmente que la definición de este espacio no es tan sencilla como el que hemos descrito y la elección de la base no podría ser tan «colocada». Podría establecerse de todas formas como un espacio vectorial de cuaternas:

(oooo), (ooo1), (oo1o), (oo11), (o1oo), ... (11o1), (111o), (1111).

d.2) Análogamente podríamos definir un espacio vectorial para la celda unidad de otros cristales. No siempre es necesario que el origen de coordenadas esté en el centro de un átomo ni que el espacio sea de tres dimensiones, pero en la mayoría de los casos resulta el modo más sencillo de definirlo. Siempre podremos hacer corresponder estos espacios finitos de tres dimensiones.

4. Construcción del espacio pseudo-euclídeo

a) *Producto escalar.*

Definimos un «producto escalar» (forma bilineal •):
Para dos ternas cualesquiera del espacio \$:

$$(a\ b\ c) \bullet (d\ e\ f) = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f.$$

Que resultará un elemento del cuerpo £ sobre el que está definido el espacio \$ de ocho puntos según la siguiente tabla:

•	1	2	3	4	5	6	7
1	1	o	1	o	1	o	1
2	o	1	1	o	o	1	1
3	1	1	o	o	1	1	o
4	o	o	o	1	1	1	1
5	1	o	1	1	o	1	o
6	o	1	1	1	1	o	o
7	1	1	o	1	o	o	1

Inmediatamente observamos que el producto definido •:
Es una forma, pues la imagen (producto) de dos vectores es un elemento del cuerpo básico.

Es bilineal, pues al ser distributivo, con A, B, C y D vectores de $, se verifica:

$$(1 . A \& 1 . B) \circ (1 . C \& 1 . D) = A \circ C + A \circ D + B \circ C + B \circ D.$$

Es simétrico, pues es conmutativo.

Pero este producto no verifica la cuarta condición del producto escalar ordinario:

En este caso el producto de un vector no nulo por sí mismo puede ser **o**.

b) *Perpendicularidad.*

Decimos que dos vectores son perpendiculares si su «producto escalar» $\circ$ es **o**.

Por tanto, un vector no nulo puede ser perpendicular a sí mismo.

Los vectores perpendiculares a sí mismos los llamaremos: *vectores isótropos.*

El conjunto de estos vectores se llama: cono isótropo; en este caso es un tetraedro isótropo, puesto que son precisamente los vectores correspondientes a los cloros los que resultan isótropos. Como es un plano, se dice subespacio isótropo total.

c) *Paralelismo.*

Diremos que dos vectores son paralelos si su «producto escalar» es 1.

La noción corriente de paralelismo y perpendicularidad no tiene consistencia en este espacio, pues un vector es paralelo a otro y éste a un tercero, que sin embargo es perpendicular al primero como ocurre con los vectores 2, 3 y 5.

Con todo, si un vector resulta perpendicular a todos los de un plano le llamaremos vector *ortogonal* al plano.

Estas discrepancias con el espacio euclídeo ordinario nos obligarán a tomar la distancia de distinta forma que como la raíz cuadrada del producto escalar.

d) *Determinación.*

Si comparamos los resultados del producto escalar $\circ$ con la tabla de planos d.5) vemos que los planos vectoriales tienen por vectores ortogonales los vectores característicos formados por los coeficientes (mng).

Por el contrario, los mismos vectores son paralelos en el sentido indicado, a los vectores de $ correspondientes a los puntos que forman el plano afín que tiene ese mismo vector característico.

Por ejemplo, el vector 6 = (11o):

Es perpendicular a los vectores 1, 6, 7 que forman el plano $x + y = o$ y es su vector característico.

Es paralelo a los vectores 2, 4, 3, 5 cuyos puntos extremos forman el plano afín correspondiente al anterior, o sea:

$$x + y = 1.$$

Un plano puede pues, quedar determinado por un vector sin que discrepe en este caso de la idea de vector característico, ya que los vectores que pertenecen a un plano son siempre perpendiculares a su vector característico.

5. Interpretación del espacio pseudo-euclídeo

a)

En la teoría de la relatividad se emplea el término «cono de luz» para designar un cono isótropo de un espacio vectorial de cuatro dimensiones que sirve de modelo local al conjunto «espacio-tiempo». El cono es isótropo respecto a una forma bilineal (producto escalar), y está formado por las rectas-trayectorias de los fotones.

En nuestro caso hemos visto que el cono isótropo es un tetraedro cuyos vértices forman un subespacio vectorial de dos dimensiones (un plano) que tiene por vector ortogonal el (111) = 7.

b)

Si consideramos un rayo de luz como una recta de nuestro espacio vectorial, de la estructura de éste se deduce que esa recta será ortogonal a alguno de los catorce planos.

Si la recta es ortogonal a algún plano ordinario al incidir, saldrá refractada según el plano afín correspondiente.

Dado que el vector característico en este caso coincide con el euclídeo y es el mismo para los dos, el rayo refractado será único.

Si la recta es ortogonal a un plano irregular realmente deberían salir dos rayos refractados, ya que el plano está en cierto modo invertido con el afín, pero como los vectores son isótropos, los dos rayos salen en la misma dirección y sólo aparece uno.

c)

Los cristales que no tengan la estructura regular del NaCl no poseerán una configuración de espacio que permita definir vectores isótropos como los descritos y aparecerán dos rayos refractados en general. En el espato de Islandia ($CaCO_3$) se pueden definir vectores isótropos los del plano de vector característico el eje óptico de simetría ternaria. Un rayo incidente según ese eje no experimentaría doble refracción. Pero si un rayo incide ortogonal a la cara del romboedro en que cristaliza, se obtendrán dos rayos refractados, fenómeno imposible en el sistema regular.

En el $CaCO_3$ tomando como base del espacio vectorial el eje óptico y el plano principal los planos de las caras no resultan «paralelos» y además sus vectores no resultan isótropos.

6. Construcción del espacio métrico

a) *Distancia.*

Definimos una distancia entre dos puntos (*a b c*) y (*d e f*) de $ como: El número de coordenadas distintas entre los dos puntos.

La distancia entre (ooo) y (*a b c*) la llamamos módulo de (*a b c*).

Esa distancia cumple las condiciones para serlo:

Es un número real (natural en este caso).

Si la distancia es o los dos puntos son el mismo punto.

La distancia de un punto a otro es igual que la de éste al primero.

La distancia entre dos puntos es siempre menor o igual que la suma de distancias de cada uno de estos dos a un tercero.

b) *Coseno.*

Definimos el coseno del ángulo que forman dos vectores como cociente del producto escalar de los dos vectores (considerado como el número real 0 ó 1) y el producto de los módulos de ambos vectores salvo si ambos son el vector 7 = (111) que vale 1.

Las siguientes tablas dan el resultado de las dos definiciones:

d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	o	1	1	2	1	2	2	3
1	1	o	2	1	2	1	3	2
2	1	2	o	1	2	3	1	2
3	2	1	1	o	3	2	2	1
4	1	2	2	3	o	1	1	2
5	2	1	3	2	1	o	2	1
6	2	3	1	2	1	2	o	1
7	3	2	2	1	2	1	1	o

cos	1	2	3	4	5	6	7
1	1	o	1/2	o	1/2	o	1/3
2	o	1	1/2	o	o	1/2	1/3
3	1/2	1/2	o	o	1/4	1/4	o
4	o	o	o	1	1/2	1/2	1/3
5	1/2	o	1/4	1/2	o	1/4	o
6	o	1/2	1/4	1/2	1/4	o	o
7	1/3	1/3	o	1/3	o	o	1

c)

De ambas definiciones obtenemos dos conclusiones: Una que la perpendicularidad se conserva, y otra que el paralelismo no corresponde al paralelismo euclídeo. Existen, por así decirlo, varias clases:

Según el coseno del ángulo A que forman, dos vectores del espacio $ pueden ser:

Ortogonales si $\cos A = o$; puntuales si $\cos A = 1$; diagonales si $\cos A = 1/4$; transversales $\cos A = 1/3$; longitudinales: $\cos A = 1/2$.

7. Métrica

a) *Determinante.*

Del mismo modo que definimos un producto escalar como un número del cuerpo £ obtenido a partir de dos vectores de \$, definimos un determinante como el número de £ obtenido a partir de tres vectores, que designamos por $dt(A, B, C)$ y que cumple:

1. $dt(A \& A', B, C) = dt(A, B, C) + dt(A', B, C)$ e igual para $B \& B'$ y $C \& C'$.

2. $dt(kA, B, C) = dt(A, kB, C) = dt(A, B, kC) = k \cdot dt(A, B, C)$ con $k = o$ ó 1.

3. $dt(A, B, C) = dt(A, C, B) = dt(B, A, C) = dt(B, C, A) = dt(C, A, B) = dt(C, B, A)$.

4. $dt(4, 2, 1) = 1$.

De estas cuatro condiciones se deduce fácilmente:

1. Si dos vectores son iguales, el determinante es o.

2. Si A, B y C están en el mismo plano vectorial su determinante es también o.

3. Por tanto, de los treinta y cinco posibles determinantes de tres vectores distintos que se pueden formar con los siete puntos, serán iguales a o:

$$dt(1, 2, 3) = dt(1, 4, 5) = dt(1, 6, 7) = dt(2, 4, 6) = dt(2, 5, 7) = o.$$
$$dt(3, 4, 7) = dt(3, 5, 6) = o.$$

4. Los veintiocho determinantes restantes con tres vectores distintos son todos iguales a 1.

b) *Producto vectorial.*

Llamaremos producto vectorial de dos vectores A y B a otro vector que designaremos $A \times B$ y que cumple:

$$A \times B \bullet X = dt(A, B, X) \quad \text{para cualquier vector X de \$}$$

o sea: el producto escalar de cualquier vector X por el vector producto vectorial de A y B es el mismo número que el determinante formado con X, con A y con B.

c) *Seno.*

Llamaremos seno del ángulo formado por los vectores A y B:

— Al número 1 si A y B son perpendiculares.

— Al cociente $\dfrac{\text{módulo de } A \times B}{\text{módulo } A \,.\, \text{módulo } B}$ entre el módulo del vector A × B y el producto (módulo de A por módulo de B) en los demás casos.

Las siguientes tablas dan los resultados del producto vectorial y del seno entre dos vectores cualesquiera de $:

$\times$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	4	2	2	6	6
2	4	0	4	1	5	1	5
3	4	4	0	3	7	7	3
4	2	1	3	0	2	1	3
5	2	5	7	2	0	7	5
6	6	1	7	1	7	0	6
7	6	5	3	3	5	6	0

sen	1	2	3	4	5	6	7
1	o	1	1/2	1	1/2	1	2/3
2	1	o	1/2	1	1	1/2	2/3
3	1/2	1/2	1	1	3/4	3/4	1
4	1	1	1	o	1/2	1/2	2/3
5	1/2	1	3/4	1/2	1	3/4	1
6	1	1/2	3/4	1/2	3/4	1	1
7	2/3	2/3	1	2/3	1	1	o

Como vemos el hecho de que existan vectores isótropos determina las condiciones del seno.

Análogamente al espacio euclídeo el vector característico de un plano resulta perpendicular a todos los vectores de ese plano.

d) *Trigonometría.*

Las fórmulas trigonométricas resultan sumamente sencillas en este espacio.

Definimos las razones tangente, cotangente, secante y cosecante como en la trigonometría euclídea:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \qquad \operatorname{ctg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \qquad \sec a = \frac{1}{\cos a} \qquad \csc a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$$

siendo a el ángulo entre dos vectores.

Según estas definiciones las fórmulas fundamentales quedan:

$$\operatorname{sen} a + \cos a = 1 \quad \text{y} \quad \sec a - \operatorname{tg} a = 1$$

que como vemos reducen a lineales las fórmulas de la trigonometría plana usual.

La resolución de triángulos no tiene objeto en este espacio puesto que sabemos que en total sólo pueden formarse $\binom{8}{3} = 56$ y están perfectamente determinados con las tablas de las secciones 6 b) y 7 c).

En conjunto el espacio definido ilustra la riqueza y variedad de las estructuras matemáticas, profundiza en su sentido en cierto modo perdido por aplicarse casi exclusivamente a espacios reales y permite construcciones artificiosas y arbitrarias no exentas de un contenido físico.

8. Interpretación del espacio métrico

a)

Supongamos que un rayo de luz atraviesa el cristal en la dirección de una de las rectas descritas.

El impacto con uno de los átomos convierte a éste en un centro difusor que emite una onda que suponemos sigue también la dirección de una recta. (En la figura 3 no se fija la dirección por claridad en el dibujo, según la debería seguir en el espacio $.)

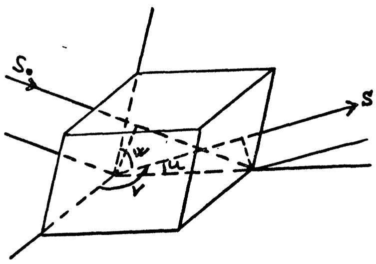

Fig. 3.

Tratamos de encontrar las condiciones para que las ondas difundidas por dos átomos se refuercen.

Para simplificar suponemos que los átomos son 0 = (ooo) y P = ($x\ y\ z$).

Sobre ambos cae un rayo siguiendo la dirección de un vector S_0 y sale un rayo difundido en la dirección de S.

Caracterizamos ambos rayos por los cosenos de sus ángulos con los vectores 4 = (1oo), 2 = (o1o) y 1 = (oo1) respectivamente.

Por ejemplo, 5 sería (1/2 o 1/2), 6 sería (1/2 1/2 o), etc.

Si se refuerzan, la diferencia de marcha entre los rayos difundidos por 0 y por P será un número entero de longitudes de onda, por tanto:

$$\text{En el eje 4: } x \cdot \cos u - x \cdot \cos u_0 = h\ \chi$$
$$\text{En el eje 2: } y \cdot \cos v - y \cdot \cos v_0 = k\ \chi$$
$$\text{En el eje 1: } z \cdot \cos w - z \cdot \cos w_0 = m\ \chi$$

Donde S es ($u\ v\ w$), S_0 es ($u_0\ v_0\ w_0$) y χ es la longitud de onda del rayo. Los productos son productos reales, pero los números obtenidos son relaciones entre la longitud, ángulos de incidencia y difusión de la onda y dimensiones del cristal.

Si las tres condiciones se cumplen simultáneamente tendremos un máximo de difracción en la dirección de S.

Por ejemplo: Para $(x\ y\ z) = (1o1)$, $S_0 = (11o)$, $S = (o11)$ sería un sistema que nos daría la longitud de χ medida en dimensiones del cristal y el número de longitudes para que incidiendo sobre (ooo) y (1o1) en la dirección de (11o), salga un máximo de difracción en la dirección de (o11).

La condición para que todas las ondas reflejadas en una determinada dirección se refuercen se reduce a la condición de que también lo hagan las ondas difundidas por planos paralelos sucesivos separados por la distancia d medida sobre el vector ortogonal común.

b)

Si el rayo incide con un ángulo t (fig. 4), la condición de refuerzo será:

$$d \cdot \operatorname{sen} t + d \cdot \operatorname{sen} t = 2\,d \cdot \operatorname{sen} t = n\,\chi.$$

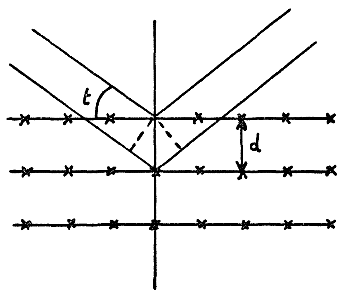

Fig. 4.

Suponiendo las direcciones del rayo incidente paralelas a los vectores del espacio $, los casos posibles serían:

$2d$ / sen t	2	4	6
1	2	4	6
1/2	1	2	3
3/4	3/2	3	9/2
2/3	4/3	8/3	4

Aun tratándose de una interpretación podemos deducir que, incluso con luz blanca y en las mejores condiciones existirá un reducido número de soluciones, como el conocido caso de las placas de Laue.

BIBLIOGRAFIA

LEVICH, V. G.: *Física teórica* (vol. 4, cap. 5). Barcelona, Ed. Reverté, 1978.

BRU VILLASECA, L.: *Cuadernos de Física* (cap. VI, 1). Madrid, Librería Romo, 1962.

DIEUDONNÉ, J.: *Algebra lineal y Geometría elemental* (Ap. II). Madrid, Selecciones Científicas, 1971.

COTTON, F. A. y WILKINSON, G.: *Química inorgánica avanzada* (caps. 2 y 4). México, Ed. Limusa, 1978.

CARTMELL, E. y FOWLES, G. W. A.: *Valencia y estructura molecular* (cap. 10). Barcelona, Ed. Reverté, 1975.

FLETCHER, T. J.: *Didáctica de la Matemática Moderna* (cap. II-4, III). Barcelona, Ed. Teide, 1968.