SOBRE LOS ESPACIOS DE BANACH CON MULTIPLICACION

por

M.ª José Mijangos

Introducción

Consideremos un espacio X sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Sabemos que X posee al menos una base de Hamel $\mathcal{B}$ y que podemos definir la dimensión ω de X como el cardinal de $\mathcal{B}$. Si $\omega \neq \aleph_0$ siempre podemos definir en X una norma para la cual es un espacio de Banach. En efecto: sea Y un espacio de Banach tal que dim Y = dim X. Como es bien sabido existe un isomorfismo lineal $T: X \longrightarrow Y$ entre ambos espacios vectoriales. Es rutinario comprobar que la aplicación $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \|T(x)\|$ define una norma completa en X.

Si consideramos que X es álgebra sobre $\mathbb{C}$ será lógico plantear una cuestion similar: ¿es posible definir en X una norma que le dé estructura de álgebra de Banach? Sin embargo la respuesta en este caso es negativa (por supuesto la cuestión sólo se refiere al caso en que dim $X \neq \chi_0$):

En efecto: sea S el conjunto de todas las sucesiones de números complejos

$$S = \{ t = (t_n)_{n=1}^{\infty} \ / \ t_n \in \mathbb{C} \} .$$

Es claro que S es un álgebra conmutativa con las operaciones habituales y el producto término a término. Sea

$$x = (n)_{n=1}^{\infty} \in S .$$

Es muy sencillo comprobar que el espectro de este elemento es el conjunto de los números naturales, $\sigma(x) = \mathbb{N}$, subconjunto no compacto de $\mathbb{C}$. Así pues en el álgebra S nunca podremos definir una norma para la cual S sea un álgebra de Banach.

Por tanto nuestra pregunta inicial se transforma en: «Dada un álgebra ¿cuándo podemos definir en ella una norma que la convierta en álgebra de Banach?»

Teniendo en cuenta la primera observación sobre los espacios vectoriales podemos reformular la cuestión de una forma más precisa: «Dado un espacio de Banach X en el que hay definida una multiplicación que le confiere estructura de álgebra, ¿qué debemos asumir para que X sea un álgebra de Banach?».

El objetivo del trabajo que se desarrolla a continuación es dar respuestas a esta pregunta.

Definición 1.—Un espacio de Banach X sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos en el que está definida una multiplicación

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\rightsquigarrow x\,y \end{aligned}$$

tal que

i) X es un álgebra, es decir:

$$x\,(y+z) = x\,y + x\,z\,; \quad (y+z)\,x = y\,x + z\,x \qquad \forall\, x, y, z \in X$$

$$x\,(y\,z) = (x\,y)\,z \qquad \forall\, x, y, z \in X$$

$$\alpha\,(x\,y) = (\alpha\,x)\,y = x\,(\alpha\,y) \qquad \forall\, x, y \in X \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$$

ii) La multiplicación es continua, es decir:

$$\exists\, M > 0 \quad \text{tal que} \quad \|x\,y\| \leq M\,\|x\|\,\|y\| \qquad \forall\, x, y \in X$$

se denomina *álgebra de Banach.*

Si además de i) y ii) la multiplicación es conmutativa, se dice que X es un álgebra de Banach conmutativa.

Si además de i) y ii) la multiplicación tiene elemento neutro, se dice que X es un álgebra de Banach con unidad.

Teorema 1.—Sea X un espacio de Banach en el que hay definida una multiplicación que le da estructura de álgebra conmutativa. Si la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\rightsquigarrow x^2 \end{aligned}$$

es continua, entonces X es un álgebra de Banach.

Demostración.—Sean

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

dos sucesiones en X tales que

$$x_n \longrightarrow x \wedge y_n \longrightarrow y\,.$$

Veamos que

$$x_n y_n \longrightarrow x y$$

En efecto:

$$2 \| x_n y_n - x y \| = \| (x_n - y_n)^2 - (x - y)^2 - (x_n^2 - x^2) - (y_n^2 - y^2) \| \leq$$
$$\leq \| (x_n - y_n)^2 - (x - y)^2 \| + \| x_n^2 - x^2 \| + \| y_n^2 - y^2 \|$$

Ahora bien:

$$\begin{matrix} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{matrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n^2 \longrightarrow x^2 \\ y_n^2 \longrightarrow y^2 \\ x_n - y_n \longrightarrow x - y \Longrightarrow (x_n - y_n)^2 \longrightarrow (x - y)^2 \end{array} \right.$$

De donde en efecto $x_n y_n \longrightarrow x y$.

Lema 1.—Sea X un álgebra conmutativa y $k \in N$. Entonces $\forall x_1, \dots, x_k \in X$ se cumple:

$$(1) \qquad 0 = \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i = 1, \dots, k}} (-1)^{k - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)} (\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k)^\alpha$$

$$\text{donde} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in N \\ 0 \leqslant \alpha < k \end{array} \right.$$

$$(2) \qquad x_1 \dots x_k = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i = 1, \dots, k}} (-1)^{k - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)} (\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k)^k$$

Demostración.—Lo demostraremos por inducción sobre k:
$k = 1$. Para demostrar (1) tomamos $\alpha = 0$

$$\underbrace{(-1)^{1-1} x_1^0}_{\varepsilon_1 = 1} + \underbrace{(-1)^1 0^0}_{\varepsilon_1 = 0} = 1 - 1 = 0$$

Veamos que también se cumple (2)

$$\frac{1}{1!} [\underbrace{(-1)^{1-1} x_1}_{\varepsilon_1 = 1} + \underbrace{(-1)^{1-0} 0^1}_{\varepsilon_1 = 0}] = x_1 \qquad C. Q. D.$$

Supongamos que se cumplen (1) y (2) hasta un cierto número $k \in N$. Demostremos que se cumplen para $k+1$.

Utilicemos la notación:

$$a = k - (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)$$
$$A = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k$$

Sea $0 \leqslant \alpha < k+1$ y veamos que se cumple (1):

$$\sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i=1,\ldots,k+1}} (-1)^{k+1-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{k+1})} (\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_{k+1} x_{k+1})^{\alpha} =$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i=1,\ldots,k+1}} (-1)^{a+1-\varepsilon_{k+1}} (A + \varepsilon_{k+1} x_{k+1}) =$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 < 1 \\ i=1,\ldots,k}} (-1)^{a+1} A^{\alpha} + \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i-1,\ldots,k}} (-1)^{a} (A + x_{k+1})^{\alpha} =$$

$$= -\Sigma(-1)^a A + \Sigma(-1)^a \binom{\alpha}{0} A^{\alpha} + \Sigma(-1)^a \binom{\alpha}{1} A^{\alpha-1} x_{k+1} +$$

$$+ \Sigma(-1)^a \binom{\alpha}{2} A^{\alpha-2} x_{k+1}^2 + \ldots + \Sigma(-1)^a \binom{\alpha}{\alpha} x_{k+1}^{\alpha} \underset{\text{hip. ind.}}{=} 0$$

Veamos que también se cumple (2):

$$\frac{1}{(k+1)!} \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i=1,\ldots,k+1}} (-1)^{k+1-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{k+1})} (\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_{k+1} x_{k+1})^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i=1,\ldots,k+1}} (-1)^{a+1-\varepsilon_{k+1}} (A + \varepsilon_{k+1} x_{k+1})^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \left[\sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i=1,\ldots,k}} (-1)^{a+1} A^{k+1} + \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0 \vee 1 \\ i=1,\ldots,k}} (-1)^{a} (A + x_{k+1})^{k+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \left[-\Sigma(-1)^a A^{k+1} + \Sigma(-1)^a \binom{k+1}{0} A^{k+1} + \right.$$

$$+\Sigma(-1)^a\binom{k+1}{1}A^k x_{k+1}+\Sigma(-1)^a\binom{k+1}{2}A^{k-1}x_{k+1}^2+\ldots+$$

$$+\Sigma(-1)^a\binom{k+1}{k+1}x_{k+1}^{k+1}\Big]=\frac{1}{(k+1)!}\left[(k+1).\,k!\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_k\cdot x_{k+1}+\right.$$

$$\left.+0+\ldots+0\right]=x_1\cdot\ldots\cdot x_{k+1} \qquad C.\ Q.\ D.$$

TEOREMA 2.—Sea X un espacio de Banach en el que hay definida una multiplicación que le da estructura de álgebra conmutativa con unidad.

Si la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \rightsquigarrow & x^k \end{array}$$

con $k \geqslant 3$ es continua, entonces X es un álgebra de Banach.

DEMOSTRACIÓN.—Sean

$$(x_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}, \ldots, (x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$$

k sucesiones en X tales que

$$\left\{\begin{array}{l} x_n^{(1)} \xrightarrow[n]{} 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} \xrightarrow[n]{} 0 \end{array}\right.$$

Vamos a demostrar que

$$x_n^{(1)}\cdot\ldots\cdot x_n^{(k)} \xrightarrow[n]{} 0$$

En efecto: Aplicando el lema 1

$$x_n^{(1)}\cdot\ldots x_n^{(k)} =$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{\varepsilon_i=0\vee 1\\ i=1,\ldots,k}}(-1)^{k-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_k)}(\varepsilon_1 x_n^{(1)}+\ldots+\varepsilon_k x_n^{(k)})^k$$

Ahora bien

$$\left.\begin{array}{l} x_n^{(1)} \longrightarrow 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ x_n^{(k)} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \varepsilon_1 x_n^{(1)}+\ldots+\varepsilon_k x_n^{(k)} \longrightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varepsilon_1 x_n^{(1)}+\ldots+\varepsilon_k x_n^{(k)})^k \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por tanto

$$x_n^{(1)} \cdot \ldots \cdot x_n^{(k)} \xrightarrow[n]{} 0$$

y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X \times \ldots\ldots \times X & \longrightarrow & X \\ (x_1, \ldots, x_k) & \rightsquigarrow & x_1 \cdot \ldots\ldots \cdot x_k \end{array}$$

es una aplicación continua. Como X tiene unidad es claro que

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x_1, x_2) & \rightsquigarrow & x_1\, x_2 \end{array}$$

es continua.

Observación

La hipótesis de existencia de unidad en el caso $k \geqslant 3$ es necesaria. En efecto: Consideremos el espacio vectorial

$$C_0 = \{ (t_n) \subset \mathbb{C} \mid t_n \longrightarrow 0 \}$$

que es un espacio de Banach con la norma

$$\| t \| = \sup_n \mid t_n \mid ; \quad \text{con} \quad t = (t_n) \in C_0 .$$

Por ser C_0 un espacio infinito dimensional existe un funcional lineal $F: C_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ discontinuo.

Denotamos $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in C_0$.

Podemos suponer $F(e_1) = 0$. (Si $\alpha = F(e_1) \neq 0$, considerando

$$\begin{array}{ccc} e_1^*: C_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t = (t_n) & \rightsquigarrow & e_1^*(t) = t_1 \end{array}$$

y tomando el nuevo funcional lineal discontinuo $\tilde{F} = \dfrac{1}{\alpha} F - e_1$ se cumpliría

$\tilde{F}(e_1) = \dfrac{1}{\alpha} F(e_1) - e^*_1(e_1) = 1 - 1 = 0$.)

Mediante este funcional podemos definir una multiplicación en C_0

$$\begin{array}{ccc} C_0 \times C_0 & \longrightarrow & C_0 \\ (a, b) & \rightsquigarrow & ab = F(a) \,.\, F(b) \,.\, e_1 \end{array}$$

siendo rutinario comprobar que C_0: i) es un álgebra conmutativa sin unidad, ii) no es un álgebra de Banach ya que la multiplicación así definida es discontinua al ser F discontinuo.

Sin embargo la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & C_0 \\ a & \rightsquigarrow & a^k \end{array}$$

con $K \geqslant 3$ es continua ya que $a \cdot a = F(a) F(a) e_1$

$$a^3 = (a\,a)\,a = (F(a) F(a) e_1)\,a = F(F(a) F(a) e_1) F(a) e_1 =$$
$$= F(a) F(a) F(e_1) F(a) e_1 = 0$$

Luego $a^k = 0 \ \forall k \geqslant 3$.

Lema 2.—Sea X un espacio de Banach y $a_0, \dots, a_n \in X$. Sea

$$\begin{array}{ccc} w : [-1, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \rightsquigarrow & w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \end{array}$$

Si existe M tal que

$$\| w(t) \| = \| a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \| \leq M, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

entonces $\| a_n \| \leqslant 2^n M$.

Demostración.—Este resultado no es más que una generalización del conocido teorema de Tchebyshev:

Sean

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} w : [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \rightsquigarrow & w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \end{array}$$

Si $| w(t) | \leqslant M \ \forall t \in [-1, 1]$ entonces $| a_n | \leqslant 2^n M$.

Veamos que en efecto la generalización es posible:

Consideremos $x^* \in X^*$ tal que $\| x^* \| \leqslant 1$ y establezcamos la siguiente composición de funciones:

$$\begin{array}{ccccc} [-1, 1[& \xrightarrow{w} & X & \xrightarrow{x^*} & \mathbb{C} \\ t & \rightsquigarrow & w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n & \rightsquigarrow & x^*(w(t)) = \\ & & & & = x^*(a_0) + \dots + t^n x^*(a_n) \end{array}$$

Por tanto $x^*(w(t))$ puede considerarse como un polinomio en t de grado menor o igual que n con coeficientes $x^*(a_i) \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, n$. Además

$$| x^*(W(t)) | \leq \| x^* \| \cdot \| w(t) \| \leq 1 \cdot M$$

Por tanto aplicando el teorema de Tchebyshev

$$| x^* (a_n) | \leq 2^n M$$

siendo válido $\forall x^* \in X^*$ tal que $\| x^* \| \leqslant 1$.
Así

$$\| a_n \| = \sup_{\| x^* \| \leq 1} | x^* (a_n) | \leq 2^n M \qquad C. Q. D.$$

Teorema 3.—Sea X un espacio de Banach en el que hay definida una multiplicación que le da estructura de álgebra conmutativa y con unidad.
Si

$$p: X \longrightarrow X$$
$$x \rightsquigarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

con $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, n-1$, y $n \geqslant 2$ es continua en $x = 0$, entonces X es un álgebra de Banach.

Demostración.—Sea $\epsilon = 1$. Como p es continua en $x = 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que si $\| x \| \leqslant \delta$ entonces $\| p(x) - p(0) \| \leqslant 1$.
Por tanto

$$\| x \| \leq \delta \implies \| p(x) \| \leq 1 + | a_0 | = M$$

Consideremos fijado $x \in K(0, \delta)$.
$\forall t \in [-1, 1]$ se tiene $t x \in K(0, \delta)$ y así

$$\| p(t x) \| = \| a_0 + a_1 (t x) + \dots + a_{n-1} (t x)^{n-1} + (t x)^n \| \leq M$$

Aplicando el lema 2

$$\| x^n \| \leq 2^n M$$

Tenemos por tanto que

$$\| x \| \leq \delta \implies \| x^n \| \leq 2^n M$$

Sea $0 \neq x \in X$, es claro que

$$\frac{x \delta}{\| x \|} \in K(0, \delta)$$

y así

$$\left\| \left(\frac{x \delta}{\| x \|} \right)^n \right\| \leq 2^n M$$

y por consiguiente

$$\| x^n \| \leq \frac{2^n \mathrm{M} \| x \|^n}{\delta^n} \quad \forall x \in \mathrm{X}$$

Luego si $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que

$$x_m \xrightarrow[m]{} 0 \Longrightarrow \| x_m \|^n \xrightarrow[m]{} 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \| x^n{}_m \| \xrightarrow[m]{} 0 \Longrightarrow x^n{}_m \xrightarrow[m]{} 0$$

Resultando que la aplicación $\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ x & \rightsquigarrow & x^n \end{array}$ es continua con $n \geqslant 2$. Aplicando el teorema 1 o el teorema 2 concluimos que X es un álgebra de Banach.

Teorema 4.—Sea X un espacio de Banach con una multiplicación que le estructura como álgebra conmutativa y con unidad. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión tal que $a_{n_0} \neq 0$ para algún $n_0 \geqslant 2$.

Si i)

$$\varnothing(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es convergente en $x \in \mathrm{K}(0, \delta) \subset \mathrm{X}$.

ii)

$$\varnothing(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es continua en $x = 0$.

Entonces X es un álgebra de Banach

Demostración.—Sea $\epsilon = 1$. Por ser

$$\varnothing(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

continua en $x = 0$ $\exists\, \delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta$ tal que

$$\| x \| \leq \delta_1 \Longrightarrow \| \varnothing(x) - \varnothing(0) \| \leq 1$$

y por tanto

$$\| \varnothing(x) \| \leq 1 + \| \varnothing(0) \| = \mathrm{M}$$

Consideremos fijado $x \in \mathrm{X}$ tal que $\| x \| \leqslant \delta_1$.

Sea $x^* \in X^*$ tal que $\| x^* \| \leqslant 1$ y establezcamos la aplicación:

$$\varnothing_{x^*} ;\ K(0,1) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mu \quad \rightsquigarrow \quad \varnothing_{x^*}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^* (a_n x^n)$$

se cumple:

i) $\varnothing_{x^*}$ está bien definida.

En efecto:

$$| \mu | \leqq 1 \Longrightarrow \| \mu x \| \leqq \delta_1 \Longrightarrow \| \varnothing (\mu x) \| = \| \Sigma a_n \mu^n x^n \| \leqq M$$

y por tanto

$$| \varnothing_{x^*} (\mu) | = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^* (a_n x^n) \right| = \left| x^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n a_n x^n \right) \right| \leqq$$

$$\leqq \| x^* \| \cdot \left\| \sum_{0}^{\infty} \mu^n a_n x^n \right\| \leqq 1 . M = M$$

ii) $\varnothing_{x^*}$ es continua en K (0, 1).

iii) $\varnothing_{x^*}$ es analítica en B (0, 1).

Por el teorema de Cauchy como

$$\varnothing_{x^*} (\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} x^* (a_n x^n) \mu^n$$

se tiene

$$x^* (a_n x^n) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{s_1} \frac{\varnothing_{x^*} (\xi)}{\xi^{n+1}} d \xi$$

$$| x^* (a_n x^n) | \leqq \frac{1}{2 \pi} \int_{s_1} \frac{| \varnothing_{x^*} (\xi) |}{| \xi |^{n+1}} d \xi =$$

$$= \frac{1}{2 \pi} \int_{s_1} | \varnothing_{x^*} (\xi) | d \xi \leqq \frac{1}{2 \pi} M . 2 \pi = M$$

Así que

$$\| a_n x^n \| = \sup_{\substack{\| x^* \| \leqq 1 \\ x^* \in X'}} | x^* (a_n x^n) | \leqq M \qquad \forall n$$

Aplicando a n_0

$$\| a_{n_0} x^{n_0} \| \leq M \Rightarrow \| x^{n_0} \| \leq \frac{M}{|a_{n_0}|} = \tilde{M}$$

Tenemos por tanto que

$$\| x \| \leq \delta_1 \Rightarrow \| x^{n_0} \| \leq \tilde{M}$$

Sea $0 \neq x \in X$, entonces

$$\frac{x \delta_1}{\| x \|} \in K(0, \delta_1) \Rightarrow \left\| \left(\frac{x \delta_1}{\| x \|} \right)^{n_0} \right\| \leq \tilde{M} \Rightarrow \| x^{n_0} \| \leq \frac{\tilde{M} \| x \|^{n_0}}{\delta_1^{n_0}}$$

Luego $\forall x \in X$

$$\| x^{n_0} \| \leq \frac{\tilde{M} \| x \|^{n_0}}{\delta_1^{u_0}}$$

Por tanto la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\rightsquigarrow x^{n_0} \end{aligned}$$

es continua y aplicando el teorema 1 o el teorema 2 concluimos que X es un álgebra de Banach.

LEMA 3.—Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X tal que $\forall x^* \in X^*$ la sucesión $(x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathbb{C}$. Entonces $(x_n)_{u=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X.

DEMOSTRACIÓN.—Llamemos

$$A_m = \} x^* \in X^* / \ | x^*(x_n) | \leq m \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \}$$

Se cumple:

— $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = X^*$

— A_m es cerrado $\forall m$.

Aplicando el teorema de las categorías de Baire $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, $0 < r_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0^* \in X^*$ tales que

$$K(x_0^*, r_0) \subset A_{m_0}$$

Sea x_n un elemento cualquiera de la sucesión y $x^* \in X^*$ tales que $\| x^* \| \leqslant 1$. Como

$$x^* = \frac{1}{r_0} (r_0 x^* + x_0^* - x_0^*)$$

y

$$\begin{cases} r_0 x^* + x_0^* \in K (x_0^*, r_0) \subset A_{m_0} \\ x_0^* \in K (x_0^*, r_0) \subset A_{m_0} \end{cases}$$

se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$

$$| x^* (x_n) | = \frac{1}{r_0} | (r_0 x^* + x_0^*) (x_n) - x_0^* (x_n) | \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_0} [| (r_0 x^* + x_0^*) (x_n) | + | x_0^* (x_n) |] \leq \frac{1}{r_0} (m_0 + m_0) = \frac{2 m_0}{r_0}$$

De donde

$$\| x_n \| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \| x^* \| \leq 1}} | x^* (x) | \leq \frac{2 m}{r_0} \; ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad C. Q. D.$$

TEOREMA 5.—Sea X un espacio de Banach en el que hay definida una multiplicación que le da estructura de álgebra conmutativa y con unidad.

Denotemos

$$X^{-1} = \{ x \in X / \exists \, x^{-1} \}$$

Si i) la aplicación

$$\begin{aligned} X^{-1} &\longrightarrow X^{-1} \\ x &\rightsquigarrow x^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

ii) $e \in \text{INT } X^{-1}$.

Entonces X es un álgebra de Banach.

DEMOSTRACIÓN.—Por ser $e \in \text{INT } X^{-1}$ $\exists \, \delta > 0$ tal que $K (e, \delta) \subset X^{-1}$. Por tanto

$$\| x \| \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} e + x \in X^{-1} \\ e - x \in X^{-1} \end{cases}$$

Sea $x \in X$ un elemento fijo tal que $\| x \| < \delta$ y sea $R > 1$ tal que $\forall \mu \in \mathbb{C}$ con $| \mu | < R$ se cumpla $\mu x \in K(0, \delta)$ (si $x \neq 0$ basta tomar $R = \dfrac{\delta}{\| x \|}$ y si $x = 0$ cualquier $R > 1$ es válido), así $e - \mu x \in X^{-1}$.

Sea $x^* \in X^*$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \varnothing_{x^*} : \; & B(0, R) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \mu \leadsto \varnothing_{x^*}(\mu) = x^* [(e - \mu x)^{-1}] \end{aligned}$$

se cumple:

— $\varnothing_{x^*}$ es continua.

En efecto: Sea $\mu_0 \in B(0, R)$ y $\mu \longrightarrow \mu_0$ en $B(0, R)$

$$\mu \longrightarrow \mu_0 \Rightarrow e - \mu x \longrightarrow e - \mu_0 x \Rightarrow (e - \mu x)^{-1} \longrightarrow (e - \mu_0 x)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varnothing_{x^*}(\mu) = x^* [(e - \mu x)^{-1}] \longrightarrow x^* [(e - \mu_0 x)^{-1}] = \varnothing_{x^*}(\mu_0)$$

— $\varnothing_{x^*}$ admite derivada de cualquier orden.

Para ver que es cierto demostraremos:

Lema 4.—Con las mismas hipótesis del teorema 5 y con la misma elección de x y de R, si $\mu \longrightarrow \mu_0$ en $B(0, R) \subset \mathbb{C}$ entonces:

(1) $\forall z \in X \quad \forall m, p \in \mathbb{N} \qquad z(e - \mu_0 x)^m (e - \mu x)^p \longrightarrow z(e - \mu_0 x)^{m+p}$

(2) $\forall m, p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad x^n (e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p} \longrightarrow$

$$\longrightarrow x^n (e - \mu_0 x)^{-m-p}$$

Demostración.

(1) $$z(e - \mu_0 x)^p (e - \mu x)^m = z(e - \mu_0 x)^p \left[\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} e (\mu x)^i \right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow z(e - \mu_0 x)^p \left[\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} e (\mu_0 x)^i \right] =$$

$$= z(e - \mu_0 x)^p (e - \mu_0 x)^m = z(e - \mu_0 x)^{m+p}$$

(2) Por inducción sobre $n = 0, 1, 2, \ldots$

$n = 0$ Aplicando (1) con $z = e$ obtenemos

$$(e - \mu_0 x)^m (e - \mu x)^p \longrightarrow (e - \mu_0 x)^{m+p}$$

y por la hipótesis i)

$$(e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p} \longrightarrow (e - \mu_0 x)^{-m-p}$$

Supongamos que (2) es cierto hasta $n-1$ y demostraremos que

$$x^n (e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p} \longrightarrow x^n (e - \mu_0 x)^{-m-p}$$

En efecto: Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $(x - \lambda_0 e) \in X^{-1}$ (cualquier $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ con $0 \neq |\lambda_0| < R$ lo verifica).

Llamamos

$$y_\mu = (x - \lambda_0 e)^{-n} (e - \mu_0 x)^m (e - \mu x)^p \xrightarrow[(1)]{} (x - \lambda_0 e)^{-n} (e - \mu_0 x)^{m+p} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow * \; y_\mu^{-1} \longrightarrow (x - \lambda_0 e)^n (e - \mu_0 x)^{-m-p} =$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} \lambda_0^i \right] (e - \mu_0 x)^{-m-p}$$

Por otra parte según la definición de y_μ:

$$* * \; y_\mu^{-1} = (x - \lambda_0 e)^n (e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p} =$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{u} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} \lambda_0^i \right] (e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p}$$

Ahora bien, por la hipótesis de inducción:

$$\forall i \quad 0 < i \leq n \quad x^{n-i} (e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p} \longrightarrow x^{n-i} (e - \mu_0 x)^{-m-p}$$

Luego comparando $*$ y $**$

$$x^n (e - \mu_0 x)^{-m} (e - \mu x)^{-p} \longrightarrow x^n (e - \mu_0 x)^{-m-p}$$

C. Q. D.

Continuamos con el teorema 5 pasando a demostrar que la aplicación $\varnothing_{x^*}$ admite derivada de cualquier orden. Probaremos por inducción sobre n que:

$$\varnothing_{x^*}^{(n)} (\mu) = n! \; x^* (x^n (e - \mu x)^{-n-1})$$

$n = 1$:

$$\varnothing'_{x^*}(\mu_0) = \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{\varnothing_{x^*}(\mu) - \varnothing_{x^*}(\mu_0)}{\mu - \mu_0} = \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{x^*[(e - \mu x)^{-1}] - x^*[(e - \mu_0 x)^{-1}]}{\mu - \mu_0} =$$

$$= x^* \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{(\mu - \mu_0)\, x\, (e - \mu x)^{-1} (e - \mu_0 x)^{-1}}{\mu - \mu_0} \underset{\text{lema}}{=} x^*(x(e - \mu_0 x)^{-2})$$

Supongamos cierta la igualdad hasta un $n \in \mathbb{N}$. Veamos que también se cumple para $n + 1$:

$$\varnothing^{(n+1)}_{x^*}(\mu_0) = \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{\varnothing^{(n)}_{x^*}(\mu) - \varnothing^{(n)}_{x^*}(\mu_0)}{\mu - \mu_0} =$$

$$= \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{n!\, x^*[x^n (e - \mu x)^{-n-1} - n!\, x^*[x^n (e - \mu_0 x)]^{-n-1}}{\mu - \mu_0} =$$

$$= n!\, x^* \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{x^n [(e - \mu_0 x)^{n+1} - (e - \mu x)^{n+1}] (e - \mu x)^{-n-1} (e - \mu_0 x)^{-n-1}}{\mu \quad \mu_0} =$$

$$= n!\, x^* \lim_{\mu \to \mu_0} \left[x^n \left[\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} e(\mu_0 x)^i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} e(\mu X)^i \right] (e - \mu x)^{-n-1} (e - \mu_0 x)^{-n-1} \Big/ (\mu - \mu_0) \right] =$$

$$= n!\, x^* \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{x^n \left[\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} (\mu^i - \mu_0^i) x^i \right] (e - \mu x)^{-n-1} (e - \mu_0 x)^{-n+1}}{\mu - \mu_0} =$$

$$= n!\, x^* \lim_{\mu \to \mu_0} x^n \left[\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} \right] \left[\sum_{j=0}^{i-1} \mu^j \mu_0^{i-j-1} \right] x^i \Bigg]$$

$$(e - \mu x)^{-n-1} (e - \mu_0 x)^{-n-1} = n!\, x^* x^n \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} i\, \mu_0^{i-1} x^i (e - \mu_0 x)^{-2n-2} =$$

$$= n!\,(n+1)\, x^* x^n \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \mu_0^i x^{i+1} \right] (e - \mu_0 x)^{-2n-2} =$$

$$= n!\,(n+1)\, x^* [x^{n+1} (e - \mu_0 x)^n (e - \mu_0 x)^{-2n-2}] = (n+1)!\, x^* [x^{n+1} (e - \mu_0 x)^{-n-2}]$$

C. Q. D.

Por tanto $\emptyset_{x^*}$ es analítica en B (0, R) así que

$$\forall \mu \ni \quad |\mu| < R: \quad \emptyset_{x^*}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\emptyset_{x^*}^{(n)}(0)}{n!} \mu^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(x^n)\mu^n$$

Como $R > 1 \ \exists \mu_0 \in \mathbb{C}$ tal que $R > |\mu_0| > 1$ y por tanto:

$$\emptyset_{x^*}(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(x^n)\mu_0^n$$

Al ser la sucesión $x^*(\mu^n_0 x^n)$ convergente aplicando el lema 3

$$\|\mu_0^n x^n\| \leq r \qquad \forall n \Longrightarrow \|x^n\| \leq r \frac{1}{|\mu_0|^n}$$

Sea ahora $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu| < |\mu_0|$. Entonces

$$|\mu|^n \cdot \|x^n\| \leq r \left(\frac{|\mu|}{|\mu_0|} \right)^n$$

y por tanto la serie $\Sigma\, |\mu|^n \|x^n\|$ es convergente ya que $\left| \frac{\mu}{\mu^0} \right| < 1$. En particular se cumplirá para $\mu = 1$ obteniendo así que $\Sigma \|x^n\|$ es convergente y por ser X un espacio de Banach obtenemos que $\Sigma\, x^n$ es convergente.

Tenemos que si $\|x\| < \delta$ entonces

$$\emptyset(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

es convergente. Además

$$\emptyset(x) = e + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = e + x(e + x + \ldots + x^n + \ldots) =$$
$$= e + x\, \emptyset(x)$$

De donde $\emptyset(x) = (e - x)^{-1}$ y es continua en $x = 0$ ya que

$$x_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow e - x_n \longrightarrow e \Longrightarrow (e - x)^{-1} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow e \Longrightarrow \emptyset(x_n) \longrightarrow \emptyset(0)$$

Aplicando el teorema 4 concluimos que X es un álgebra de Banach.

OBSERVACIONES

Las dos hipótesis del teorema 5 son independientes. En efecto:

(1) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión c, con una multiplicación definida en él de forma que X sea un cuerpo conmutativo. (Basta considerar por ejemplo el álgebra $\mathcal{M}$ (X) de funciones meromorfas de una variable compleja.)

Podemos suponer, según se explica en la introducción, que X es un espacio de Banach para una cierta norma $\|\cdot\|$. Ahora bien, X no es un álgebra de Banach porque si lo fuera, según el teorema de Mazur-Gelfand, sería isomorfo a $\mathbb{C}$ en contra de que $\dim X = c$.

Sin embargo este álgebra con la norma $\|\cdot\|$ verifica que $e \in \text{INT } X^{-1}$ ya que $X^{-1} = X - \{0\}$ y el espacio es Hausdorff.

(2) Sea X un álgebra sobre $\mathbb{C}$, conmutativa con unidad tal que

$$\dim X = c$$

$$X^{-1} = \{ \lambda e / \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \}$$

$$X^{-1} \neq X - \{0\}$$

(Por ejemplo, sea T un conjunto tal que card T $= c$ y consideremos el conjunto A de los polinomios generalizados por T o generados por los elementos de la forma

$$x_{t_1}^{n} \cdot \ldots \cdot x_{t_k}^{n}$$

donde

$$t_1, \ldots, t_k \in T$$
$$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Es claro que definiendo en A las operaciones generalizadas de las usuales en $\mathcal{P}(x)$ obtenemos un álgebra que cumple los requisitos solicitados.)

Consideremos una norma $\|\cdot\|$ en X de forma que X sea un espacio de Banach. Así la aplicación

$$\begin{aligned} X^{-1} &\longrightarrow X^{-1} \\ \lambda e &\rightsquigarrow \frac{1}{\lambda} e \end{aligned}$$

es claramente continua.

Sin embargo X no es un álgebra de Banach ya que $\text{INT } X^{-1} = \emptyset$ puesto que X^{-1} está contenido en el subespacio $S = \{ \lambda e / \lambda \in \mathbb{C} \}$ de dimensión uno y por tanto de interior vacío.

BIBLIOGRAFIA

[1] BONSALL, F. F. y DUNCAN, J.: *Complete Normed Algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[2] GUICHARDET, A.: *Special Topics in Topological Algebras*. Gordon & Breach, New York, 1968.

[3] MARKUSHEVICH, A. I.: *Teoría de las Funciones Analíticas*. Urmo, S. A., 1977. (Trad. ruso, 3.ª edición, 1966.)

[4] RUDIN, W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.

[5] ŻELAZKO, W.: *Banach Algebras*. Elsevier, Amsterdam y PWN. Warszawa, 1973.