LA NOCION DE CURVA A TRAVES DE LA HISTORIA

por

DALMACIO GÓMEZ CAMPILLO

Colegio Universitario "Santo Reino", Jaén

Diremos previamente que la palabra curva está tomada directamente del latín, siendo parecida o igual su ortografía en las lenguas de los países que geográficamente nos son próximos: *Courbe* (en francés), *curva* (italiano y portugués), *curve* (inglés), *Kurve* (alemán), etc.

Su concepto intuitivo es inmediato, pues podemos imaginar las curvas como trayectorias de un punto en movimiento. No fue así el conseguir la definición lógica y rigurosa equivalente a tal concepto; definición que ha pasado por numerosas vicisitudes en su forma, como consecuencia de un mayor desmenuzamiento de sus propiedades y un mayor número de restricciones en su concepción. Corroborando esas numerosas vicisitudes por las que ha pasado el concepto de curva para ser introducido en el lenguaje de la Matemática, con el rigor que ésta implica, tenemos la frase que pronunciara Study (1): «Los matemáticos no se han puesto de acuerdo todavía acerca del concepto de curva».

Ya en el libro I de *Los Elementos* de Euclides (matemático griego del siglo III antes de J. C.), dentro de la parte correspondiente a Definiciones, tenemos:

«La línea es una longitud sin anchura» (Definición 2).

«Los extremos de las superficies son líneas» (Definición 6).

Así se trataba de expresar en términos lógicos la idea de línea; ahora bien estas definiciones no son, por supuesto, suficientes, sirviendo principalmente para explicar sus propiedades.

Hasta la época del Renacimiento no se ofrecen aspectos nuevos, respondiendo a los principios de la Geometría griega el tratamiento de los problemas matemáticos.

En el siglo XVII se introduce la noción de función y se la precisa con una gran diversidad de formas. La expresión «curva cualquiera» aparece con frecuencia; posiblemente se concibe bajo forma cinemática o experimen-

(1) Study (Eduardo).—Matemático alemán, profesor de la Universidad de Bonn, nació el 23 de marzo de 1862.

tal, sin que se crea necesario que una curva sea capaz de una caracterización analítica o geométrica que pueda servir de objeto a los razonamientos. De esta forma proceden, principalmente, Cavalieri (2), Pascal (3) y Barrow (4), en concreto el último, al razonar sobre la curva plana

$$x = k\,t, \quad y = f(t)$$

afirma (junto a la hipótesis de que $f'(t)$ sea creciente): «no importa en absoluto que $f'(t)$ crezca con regularidad siguiendo una ley cualquiera, o bien irregularmente».

René Descartes (soldado, filósofo y matemático francés), en su *Géométrie* (1637) pone en correspondencia (por medio de la establecida entre los puntos del plano y los pares de números reales), los conceptos de *línea* y *función*. Desde entonces la noción de curva se ha ido desarrollando paralelamente a la de función, pero con cierto retraso respecto de ella. En el libro II de su *Géométrie,* Descartes se pregunta: ¿cuáles son las líneas que pueden admitirse en Geometría?; y concluye que solamente las algebraicas. Leibniz (5) amplió punto de vista tan estrecho, y proclama (1684) el derecho de otras curvas (por ejemplo: la cicloide) a ser incluidas en la Geometría.

Es desde entonces cuando el concepto de curva ha pasado por una evolución más interesante.

En 1879 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (matemático alemán, Ostenfelde 1815-Berlín, 1897) llama *curva analtica* «al conjunto de puntos reales e imaginarios definidos por dos series convergentes:

$$x = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \ldots$$
$$y = b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \ldots$$

ordenadas según las potencias del parámetro t».

Esta definición comprende las curvas algebraicas y todas las trascendentes hasta entonces conocidas (5).

Mas esta noción se hizo pronto insuficiente, por lo que considerando sólo puntos reales, fue rápidamente generalizada por los matemáticos de la escuela de Weierstrass (Stolz, Du Bois-Reymond, etc.), los cuales consideran como *curva real* el «conjunto de los puntos definidos por dos funciones reales cualesquiera $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$», teniendo la palabra *función* el sentido amplísimo de Dirichlet. Naturalmente, sólo en el caso de funciones continuas muy especiales resultan conjuntos de puntos que corresponden a la idea intuitiva de curva.

---

(2) Cavalieri (Rvdo. P. Bonaventura).—Jesuita y matemático italiano (Milán hacia 1598-Bolonia, 1647).

(3) Pascal (Blaise).—Matemático, físico y filósofo francés (Clermont-Ferrand, 1623-París, 1662).

(4) Barrow (Isaac).—Matemático inglés, nació en Londres el año 1630 y murió en la misma ciudad el 1677.

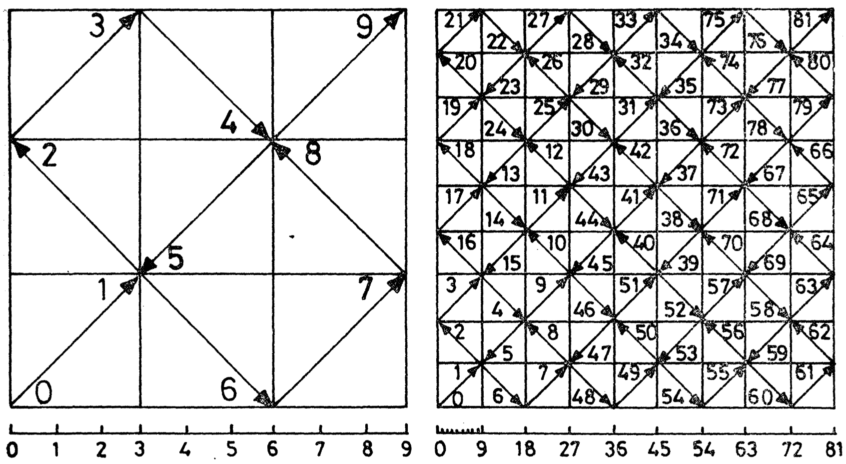
(5) Leibniz, alias Leibnitz (Gottfried Wilhelm).—Filósofo y matemático alemán (Leipzig, 1646-Hannover, 1716). Prefirió llamar *algebraicas* y *trascendentes* a las curvas que Descartes había llamado, respectivamente, *geométricas* y *mecánicas*.

Sobre las restricciones que se debe imponer a estas funciones, para no caer en el estudio de lugares que nada se parecen al concepto vulgar de curva, hay muchos criterios, siendo la noción más general de curva real que parecía admisible: «Lugar de puntos (x, y) definidos por dos funciones continuas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, definidas en un intervalo»; o a la manera geométrica de Hurwitz (6): «Curva plana es un conjunto de puntos en correspondencia *continua* con los de un segmento».

Dentro de esta idea tan amplia de curva, caben infinidad de entes que nada de común tienen con la noción vulgar de curva. Así, Peano (7), Hilbert (8), etc., han dado pares de funciones continuas y uniformes, tales que la curva por ellos definida contiene todos los puntos de un cuadrado. Para evitar tan excesiva amplitud del concepto, se idearon diversas restricciones cuyo objeto era no alejarse demasiado de la idea intuitiva de curva.

Acerca de curvas que llenan un área (como las de Peano, etc.) expongamos la construcción dada por Schoenflies (9):

«Dado un segmento y un cuadrado, dividamos aquél en nueve partes iguales, y éste en nueve cuadrados también iguales, haciendo corresponder éstos



a aquéllos en el orden indicado en la figura primera. Obtenemos así diez puntos del segmento (los de división), a los cuales asignamos sus correspondientes en el cuadrado, como indican los extremos de los trazos marcados en la figura. Subdividamos ahora cada segmento y cada cuadrado en nueve partes iguales, haciéndolas corresponder en el orden indicado por la segunda figura. Así tenemos 82 pares de puntos correspondientes. Siguiendo de este

(6) Mat. Congres Zurich.
(7) Peano (Giuseppe).—Lógico y matemático italiano (Cueno, 1858-Turín, 1932).
(8) Hilbert (David).—Matemático alemán (Königsbert, 1862-Gotinga, 1943).
(9) Schoenflies (Arthur).—Matemático alemán (1853-1927).

modo, obtenemos dos redes de puntos, cada vez más densas, en el segmento y en el cuadrado.

Dado un punto cualquiera del segmento, caben dos posibilidades: o llega a obtenerse como punto de subdivisión, en cuyo caso ya le hemos asignado su correspondiente en el cuadrado, o aparece dicho punto como límite de una sucesión indefinida de segmentos, cada vez más pequeños, contenido cada uno en el anterior, a los cuales corresponden cuadrados también contenidos unos en otros, y que también tienden a cero; por consiguiente, en virtud del axioma de Dedekind, existe un punto único contenido a la vez en todos; y este punto lo asignamos a aquel primero como correspondiente. Recíprocamente, todo punto del cuadrado tiene al menos un correspondiente en el segmento».

Fácilmente se ve que la correspondencia establecida (unívoca, pero no biunívoca) es continua; a cada punto del segmento corresponde uno solo del cuadrado; pero hay puntos de éste que tienen varios homólogos en aquél.

Cantor, en 1883, concretándose a las líneas planas las define como «un conjunto continuo de puntos del plano sin puntos anteriores», pero esta definición de Cantor (10) que viene a coincidir con la de Euclides («línea es longitud sin anchura»), aunque más perfeccionada, comprende además de los entes intuitivos que designamos como líneas, otros que se hallan muy lejos de parecérseles, como, por ejemplo: «la constituida por los cuatro lados de un cuadrado, de longitud igual a la unidad, más los segmentos de igual longitud contenidos en él y las paralelas trazadas por todos los puntos del eje O X de abscisas racionales cuyo denominador sea una potencia de 2, los cuales dividen al cuadrado en infinitos rectángulos y para la intuición parecen llenar por completo el cuadrado».

Añadiedo ciertas restricciones llegamos al concepto de *curva de Jordán* (1893). Se llama curva de Jordán «todo conjunto de puntos en correspondencia biunívoca y continua con los valores t de un intervalo $[t_0, t_1]$, o con los puntos del segmento que le representa». Analíticamente, dos funciones continuas en el intervalo $[t_0, t_1]$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

nos definirán las coordenadas x, y de los puntos de la curva. Ambas ecuaciones constituyen las llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva. La ecuación ordinaria $y = f(x)$ se obtendrá eliminando t entre esas dos ecuaciones.

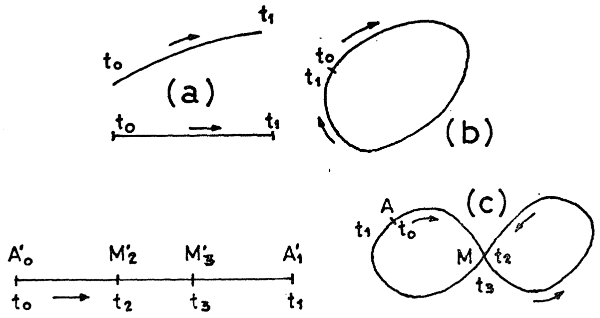
Si hay un solo punto de la curva al cual corresponden los dos extremos del segmento, la curva es *cerrada*; en caso contrario, es *abierta*. En ambos casos carece de puntos múltiples.

El haber impuesto la condición de biunivocidad, además de la de continuidad, evita el que estas curvas puedan llenar un área plana, como las de Peano, gracias al carácter invariante del número de dimensiones del espacio, demos-

(10) Cantor (Georg Ferdinand Ludwig).—Matemático ruso (San Petersburgo, 1845-Halle, 1918). Víctima de la incomprensión de sus contemporáneos, murió en un hospital psiquiátrico.

trado por Brouwer (11) y Lebesgue (12) en 1911, cuestión importantísima para la Matemática, «porque si existiesen curvas de Jordán como las de Peano se reduciría el estudio de los espacios de cualquier número de dimensiones al de los de una sola dimensión, y el de las funciones de cualquier número de variables independientes a las de una sola variable».

En realidad, Camille Jordán (Lyon, 1838-París, 1922), generalizó las ideas conjuntistas de Cantor al continuo geométrico, y estableció así un equivalente en *Topología* del concepto clásico de línea geométrica (13).



(a) Curva de Jordán abierta.
(b) Curva de Jordán cerrada.
(c) No es curva de Jordán.

Ahora bien, las curvas de Jordán, que hemos definido en la página anterior, pueden carecer de tangentes. Un ejemplo de curvas de Jordán sin tangentes lo tenemos en las curvas de Von Koch (14). La curva de Von Koch se construye así: «un segmento A B se divide en tres partes iguales

$$A B_1 = B_1 B_2 = B_2 B,$$

y sobre la central se construye un triángulo equilátero $B_1 B' B_2$; cada uno cada uno de los segmentos

$$A B_1, B_1 B', B' B_2, B_2 B,$$

---

(11) Brouwer (Luitzen Egbertus Jan).—Matemático y lógico holandés (Overschie, 1881).

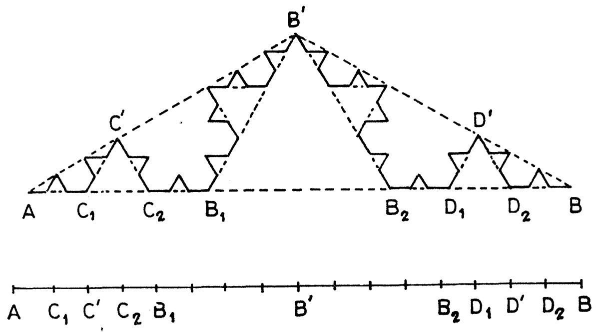
(12) Lebesgue (Henri Leon).—Matemático francés (Beauvais, 1875-París, 1941).

(13) Con lenguaje moderno, se llama arco simple de Jordán, o simplemente arco, en un espacio topológico, a la imagen por una homeomorfía de una circunferencia. (Una biyección bicontinua f de un espacio topológico E sobre otro espacio topológico F, que eventualmente puede ser el mismo, se llama homeomorfismo).

(14) HELGE VON KOCH: *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géometrique élémentaire.* «Acta mathematica», t. 30 (1906), págs. 145-174.

se divide en tres partes, y sobre la central de cada uno se construye hacia afuera un triángulo equilátero, y así se sigue indefinidamente.

En la figura aparece claramente la correspondencia biunívoca continua con los puntos del segmento; se han trazado solamente los tres primeros polígonos inscritos, y se observa que las semirrectas que unen cada punto con los vértices próximos hacia un lado oscilan indefinidamente dentro de un ángulo de 30°. La curva así definida carece, pues, de tangente en cada punto del conjunto construido con este proceso; y tampoco lo hay (como puede demostrarse) en los puntos de acumulación, que corresponden a los valores de t no expresables finitamente en el sistema de base 4».



Imponiendo a las curvas de Jordán la existencia de tangentes, o sea, ser «definidas por pares de funciones, $x = x(t)$, $y = y(t)$, uniformes, continuas y desarrollables, con derivada única, excepto en ciertos puntos del intervalo de definición», se han obtenido las llamadas *curvas regulares*. (Si una curva no fuese regular en todo el intervalo de definición, pero se pudiera descomponer éste en intervalos parciales en número finito, a cuyos valores de t correspondiesen arcos regulares de la curva, ésta se llamaría *regular a trozos*). Exigiendo además, a dichas funciones, que sean monótonas por secciones (15) han resultado los arcos de *curvas ordinarias*.

Finalmente, si cada una de las funciones que definen una curva de Jordán, es desarrollable en serie de Taylor convergente en un entorno de todo punto t del intervalo en que están definidas, estas curvas se llaman *analíticas* en dicho intervalo.

Con lenguaje actual, representemos con E_2 y V_2 un plano euclídeo y el plano vectorial asociado, respectivamente. Sea $(0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ un sistema de referencia métrico de E_2, cumpliéndose:

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2).$$

---

(15) Llamamos función monótona la que no tiene dentro del intervalo de existencia ningún máximo ni mínimo.

Una función es *monótona* por secciones cuando, «tanto ella como sus transformadas mediante cualquier sustitución lineal, únicamente poseen un número finito de máximos y mínimos».

Sea además $x(t)$ una aplicación biunívoca y diferenciable de un intervalo $I(t)$ en V_2.

A todo t del intervalo I se le hace corresponder un punto X de E_2 tal que: $\mathbf{O X} = \mathbf{x}(t)$.

Llamamos *arco de curva plana* al conjunto de todos los puntos X así determinados. Se llama *curva plana* a todo conjunto de puntos del plano que sea unión de un número finito de arcos de curva y de sus puntos de acumulación.

Análogamente definimos el arco de curva de E_3: Ahora representamos con E_3 el espacio euclídeo y con V_3 el espacio vectorial asociado. Un sistema de referencia métrico de E_3 lo representamos:

$$(0 ; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una aplicación biunívoca de un intervalo I de la recta real en V_3. (Suponemos que $x(t)$ tiene derivadas terceras continuas.)

A cada vector $\mathbf{x}(t)$ se le hace corresponder, respecto del origen **0**, un punto $X(t)$ de E_3. Al lugar constituido por estos puntos le llamamos arco de curva de E_3.

BIBLIOGRAFIA

ABELLANAS, P.: *Geometría básica*. Madrid, 1961.

BAKER, C. C. T.: *Dictionary of Mathematics*. London, 1961.

BALLENTYNE, D. W. G.: *A dictionary of named effects and laws in Chemistry* «Physics and Mathematics», London, 1972.

CHAMBADAL, L.: *Dictionnaire des Mathématiques modernes*. París, 1970.

DÍAZ VELÁZQUEZ, M.: *Diccionario básico de Matemáticas*. Madrid, 1979.

EUCLIDES: Los seis primeros libros y el undécimo y duodécimo de sus *Elementos* (traducidos sobre la versión latina de Federico Comandino por Roberto Simson). Madrid, 1744.

HERVELLA TORRÓN, L. M.: *Geometrías hermíticas*. Santiago de Compostela, 1974.

HICKS, N. J.: *Notas sobre Geometría diferencial*. Barcelona, 1974. (Traducción por F. Pañuella y E. Jaranta).

HODGE, W. V. D.: *Methods of Algebraic Geometry*. Cambridge, 1947.

KLINGER, *F.H ¿La Geometría?* Barcelona, 1979. (Traducción de L. Ibáñez.)

REY PASTOR, J. y PUIG ADAM, P.: *Elementos de Geometría*. Madrid, 1956.

REY PASTOR, J., SANTALÓ, A. y BALANZAT, M.: *Geometría analítica*. Buenos Aires, 1955.

REY PASTOR, J.: *Geometría del espacio*. Buenos Aires, 1928.

RODRIGÁÑEZ, E.: *Geometría analítica y análisis vectorial*. Madrid, 1947.

SÁNCHEZ SERRANO, A.: *Curvas y superficies*. Madrid, 1968.

SEMPLE, J. G. y ROTH, L.: *Introduction to Algebraic Geometry*. Oxford, 1949.

SEVERI, F.: *Elementos de Geometría*. (Traducción de T. Martín Escobar.) Barcelona, 1940.

SEVERI, F.: *Lecciones de análisis*, I y II. Barcelona, 1951.
STRUIK, D. J.: *Geometría diferencial clásica*. (Traducción de L. Bravo Gala.)
Madrid, 1961.
VASAL'LO PARIAS, A.: *Geometría diferencial*. Madrid, 1968.
WALKER, R. J.: *Algebraic curves*. Princeton (N. J.), 1950.