# ALGUNAS DESIGUALDADES ELEMENTALES

por

J. B. ROMERO MÁRQUEZ
*Catedrático de Matemáticas de I. N. B.*

1. El objeto de este trabajo es establecer desigualdades importantes del Análisis, utilizando como punto de partida las funciones

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

continuas. Es conocido que para tales funciones $\exists\, c \in \mathbb{R}$ único,

$$f(x) = c\,x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Existen otras caracterizaciones equivalentes de las funciones lineales, entre espacios vectoriales, ver [1].

También es conocido que existen funciones

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

no continuas (Hamel). Las funciones lineales de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, juegan un papel esencial en la Geometría, a la hora de establecer la medida del área y volumen de los cuerpos geométricos.

2. *Motivación.*—Nos planteamos los siguientes problemas:

2a) ¿Dada $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(D \neq \phi)$ (D intervalo abierto, cerrado, etc., acotado o no), $\exists\, a \in \mathbb{R} - \{1\} \mid$ si $a\,x \in D$ $\forall\, x \in D$, $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$? (problema local).

2b) ¿Dada $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, D en las mismas condiciones anteriores, encontrar el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\forall\, (x, a) \in D \times A$, $a\,x \in D$, $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$? (problema global).

2c) ¿Dada $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, encontrar los mayores subconjuntos A y $B \subset \mathbb{R}$ tales que $\forall\, (a, b, x) \in A \times B \times D$ $a\,x$, $b\,x \in D$ $\forall\, x \in D$, $b\,f(a\,x) \leqslant a\,f(b\,x)$ ó $a\,f(b\,x) \leqslant b\,f(a\,x)$?

2d) Dada $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, si A es el mayor conjunto del problema 2b) y si designamos por $\mathcal{F}^*(D, A) = \{f: D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ $\forall\, (a, x) \in A \times D$, tal que $a x \in D\}$ y $\mathcal{F}_*(D, A) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid a f(x) \leqslant f(a x)\ \forall (a, x) \in A \times D$, tal que $a x \in D\}$, ¿qué estructura tiene tales conjuntos de funciones?

2e) ¿Qué propiedad geométrica o diferencial caracteriza a las funciones $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, para las que $\exists\, a \in \mathbb{R} - \{1\}$ $f(a x) \leqslant a f(x)$ ó $a f(x) \leqslant f(a x)$?

*Observaciones:*

1) Siempre $1 \in A$ para 2b), el caso de interés es, cuando $A \neq \{1\}$.

2) En particular si $D = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_*(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}^*(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

espacio vectorial de las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

3) A los conjuntos D y A del problema 2b), donde $f$ verifica que

$$f(a x) \leqslant a f(x) \quad \text{ó} \quad a f(x) \in f(a x),$$

les llamaremos los máximos conjuntos, donde la función $f$ se desvía por encima o por debajo de las funciones lineales homogéneas.

4) Si $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ es simétrica respecto al origen y si A es el conjunto del problema 2b) entonces $A \supset \{-1, 1\}$ ya que $\forall x \in D$, $f(-x) = (-1) f(x)$.

3. *Convexidad de Hierarchy.*—Hagamos un breve resumen de [1].

Sea $K(b) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ es continua y no negativa sobre el segmento $I = [0, b]$ y $f(0) = 0\}$. Llamamos función media F de la función $f \in K(b)$, a la función definida como sigue:

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, d t \quad (0 < x \leqslant b) \quad \text{y} \quad F(0) = 0.$$

Por el teorema fundamental del Cálculo, $F \in K(b)$. Si designamos

$K_1(b) = \{f \in K(b) \mid f$ es convexa en $I\}$;
$K_2(b) = \{f \in K(b) \mid F \in K_1(b)\}$;
$K_3(b) = \{f \mid \forall x \in I$ y $\forall t \in [0, 1]$, $f(t x) \leqslant t f(x)\}$;
$K_4(b) = \{f \mid f(x + y) \geqslant f(x) + f(y)$, $\forall x, y$, $x + y \in I\}$;
$K_5(b) = \{f \mid F \in K_3(b)\}$;
$K_6(b) = \{f \mid F \in K_4(b)\}$.

Bruckner y Ostrow prueban que

$$K_1(b) \subset K_2(b) \subset K_3(b) \subset K_4(b) \subset K_5(b) \subset K_6(b)$$

y Beckenbach prueba que los contenidos anteriores pueden ser estrictos. Petrovic: «Si $f$ es una función convexa sobre el segmento $I = [0, a]$, si $x_i \in I$ $(i = 1, \dots, n)$ y $x_1 + \dots + x_n \in I$, entonces

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \leqslant f(x_1 + \dots + x_n) + (n - 1) f(0)»,$$

[1], págs. 8-26, 362-380; [2], págs. 1-55; [3], págs. 251-274, y [4], cap. VIII.

4. *Resultados.*

*Proposición 4.1.*—Sea $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, y si $\exists\, a \in \mathbb{R}$,

$$f(a\,x) \leqslant a\,f(x) \quad \text{ó} \quad a\,f(x) \leqslant f(a\,x), \quad a\,x \in D \quad \forall\, x \in D,$$

entonces si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a^n\,x \in D$, $\forall\, x \in D$ se tiene

$$f(a^n\,x) \leqslant a^n\,f(x) \quad \text{ó} \quad a^n\,f(x) \leqslant f(a^n\,x) \quad \forall\, x \in D.$$

*Demostración.*—La prueba es obvia por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

*Proposición 4.2*—Sea $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y si

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^{*+}, \quad a\,x, \ \frac{x}{a} \in D \quad \forall\, x \in D,$$

entonces

$$f(a\,x) \leqslant a\,f(x) \quad \forall\, x \in D \Longleftrightarrow \frac{1}{a}\,f(x) \leqslant f\left(\frac{x}{a}\right) \quad \forall\, x \in D.$$

*Demostración.*—$\Longrightarrow$ $\forall\, x \in D$, $f(x) = f(a\,a^{-1}\,x) \leqslant a\,f\left(\frac{x}{a}\right) \Longrightarrow \frac{1}{a}\,f(x) \leqslant$ $\leqslant f\left(\frac{x}{a}\right)$. $\forall\, x \in D$. $\Longleftarrow$) $\forall\, x \in D$, $f(x) = f\left(\frac{1}{a}\,(a\,x)\right) \geqslant \frac{1}{a}\,f(a\,x) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ $\forall\, x \in D$.

*Corolario 4.3.*—Si $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y si $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant a < 1$ y $a\,x \in D$, $\forall\, x \in D$ y si $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$ $\forall\, x \in D$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a^n\,x) \leqslant \frac{f(x)}{1-a} \quad \text{ó} \quad \frac{f(x)}{1-a} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} f(a^n\,x) \quad \forall\, x \in D.$$

*Demostración.*—Consecuencia de la proposición 4.1 y tener en cuenta la serie geométrica.

*Definición 4.4* (Funciones convexas).—Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$; se dirá que una función numérica $f(x)$ es convexa en C si $x, x' \in C$, $(p, p') \in P_2$; entonces, $f(p\,x + p'\,x') \leqslant p\,f(x) + p'\,f(x')$. Se dirá que $f(x)$ es cóncava en C si $f(p\,x + p'\,x') \geqslant p\,f(x) + p'\,f(x')$. Así $f(x)$ es cóncava $\Longleftrightarrow$ $-f(x)$ es convexa. Si las desigualdades precedentes son estrictas para $x \neq x'$, $p, p' \neq 0$ se dirá que $f(x)$ es estrictamente convexa, o estrictamente cóncava respectivamente.

*Observación.*—Si $x' = 0 \in C$ y $f(0) = 0$, entonces si $f$ es convexa $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow f \in \mathcal{F}^*$. Lo mismo si $f$ es cóncava, $f \in \mathcal{F}_*$.

*Proposición 4.5.*—Si $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $\forall (a, x) \in A \times D$, $a\,x \in D$, y si $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$ $\forall x \in D$, entonces A es un semigrupo unitario multiplicativo.

*Demostración.*—Supongamos por ejemplo que $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$, $\forall (a, x) \in D$, $a\,x \in D$. Es claro que $1 \in A \neq \emptyset$. Sean $a, b \in A$ y sea $c = a\,b$, entonces $\forall x \in D$,

$$f(c\,x) = f(a\,b\,x) = f(a\,(b\,x)) \leqslant a\,f(b\,x) \leqslant a\,b\,f(x) = c\,f(x),$$

luego $c \in A$. Por tanto, A es un semigrupo unitario multiplicativo de $\mathbb{R}$.

*Teorema 4.6.*—Sea $f\colon [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'$ creciente (resp. decreciente) y si $0 \leqslant a \leqslant 1$, entonces $\forall (a, x) \in [0, 1] \times [0, \infty[$, se tiene que:

$$f(a\,x) - a\,f(x) \leqslant f(0)\,(1 - a) \quad \text{ó} \quad f(0)\,(1 - a) \leqslant f(a\,x) - a\,f(x).$$

*Demostración.*—Se tiene $\forall (a, x) \in [0, 1] \times [0, \infty[$, $0 \leqslant a\,x \leqslant x$ y si $f'$ es creciente, entonces $f'(0) \leqslant f'(a\,x) \leqslant f'(x)$. Ahora sea $g_a\colon [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(a\,x) - a\,f(x)$, $x \in [0, \infty[$ es derivable, y, $g'_a(x) = a\,(f'(a\,x) - f'(x))$; de aquí como $\forall x \in [0, \infty[$, $0 \leqslant f'(x) - f'(a\,x) \Longrightarrow g'_a(x) \leqslant 0$ para $x \geqslant 0$. Por tanto, $g_a$ es decreciente para $x \geqslant 0$ y $g_a(x) \leqslant g_a(0)$ si $x \geqslant 0$. Como $g_a(0) = f(0) - a\,f(0) = (1 - a)\,f(0)$, entonces

$$f(a\,x) - a\,f(x) \leqslant (1 - a)\,f(0) \quad \text{si} \quad x \geqslant 0.$$

Si $f'$ es decreciente, entonces $f'(x) \leqslant f'(a\,x) \leqslant f'(0)$ si $n \geqslant 0$ y $g'_a(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$, y por tanto $g_a$ es creciente para $x \geqslant 0$, y por tanto $g_a(0) \leqslant g_a(x)$ si $x \geqslant 0$ y, de aquí se obtiene que:

$$(1 - a)\,f(0) \leqslant f(a\,x) - a\,f(x) \quad \text{para} \quad x \geqslant 0.$$

Pruebas similares se pueden hacer si $a \in \mathbb{R} - [0, 1]$, con los cambios adecuados en las desigualdades.

*Corolario 4.7.*—Si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f'$ creciente (resp. decreciente) y si $a \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, entonces

$$f(a\,x) - a\,f(x) \leqslant f(0)\,(1 - a) \quad \text{ó} \quad f(0)\,(1 - a) \leqslant f(a\,x) - a\,f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Observaciones.*

1) Si $f(0) = 0$, entonces el teorema 4.6 toma ahora la forma para $0 \leqslant a \leqslant 1$, $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$ para $x \geqslant 0$.

*Corolario 4.8.*—Si $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f'$ creciente continua (resp. decreciente) y si $a \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(0) - c\,x \leqslant f(x)$ ó $f(x) \leqslant f(0) - c\,x$.

*Demostración.*—Por el corolario 4.7, tenemos que $f(a\,x) - a\,f(x) \leqslant$

$\leqslant f(0)(1-a)$ ó $f(0)(1-a) \leqslant f(ax) - af(x)$ para $x \geqslant 0$; entonces para $0 \leqslant a < 1$, supongamos por ejemplo que $f(ax) - af(x) \leqslant f(0)(1-a)$ para $x \geqslant 0$, entonces

$$\frac{f(ax) - af(x)}{1-a} \leqslant f(0) \quad \text{para} \quad x \geqslant 0.$$

Pasando al límite, tenemos

$$\lim_{a \to 1^-} \frac{f(ax) - af(x)}{1-a} \leqslant f(0) \quad \text{para} \quad x \geqslant 0.$$

De aquí, por la regla de L'Hopital, se tiene $f(x) - xf'(x) \leqslant f(0)$ para $x \geqslant 0$. Por ello, para $x > 0$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \leqslant \frac{f(0)}{x^2},$$

e integrando, se tiene

$$\frac{-f(x)}{x} \leqslant \frac{-f(0)}{x} + C \quad \text{para} \quad x \geqslant 0$$

Esto es para $x \geqslant 0$, $f(0) - cx \leqslant f(x)$.

*Observación.*—1) Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, $f'$ creciente (resp. decreciente) y si $0 \leqslant a \leqslant 1$, entonces sabemos que $\forall (a, x) \in [0, 1] \times [0, \infty[$, $f(ax) - af(x) \leqslant f(0)(1-a)$ ó $f(0)(1-a) \leqslant f(ax) - af(x)$. Estas desigualdades se escriben así: $\forall (a, x) \in [0, 1] \times [0, \infty[$, $f(ax) \leqslant af(x) + f(0)(1-a)$ ó $f(0)(1-a) + af(x) \leqslant f(ax)$. Aquí $af(x) + f(0)(1-a)$ $\forall x \in [0, \infty[$ se interpreta, como la media baricéntrica de $f(x)$ y $f(0)$, con pesos $a$ y $1-a$.

2) Si en 1) hacemos $x = 1$, tenemos

$$f(a) - af(1) \leqslant f(0)(1-a) \quad \text{ó} \quad f(0)(1-a) \leqslant f(a) - af(1)$$

para $0 \leqslant a \leqslant 1$, que coincide parcialmente con el corolario 4.8.

*Teorema 4.9.*—Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'$ creciente (resp. decreciente), si $0 \leqslant a < b$, entonces

$$af(bx) \leqslant bf(ax) \quad \text{ó} \quad bf(ax) \leqslant af(bx)$$

para todo $x \geqslant 0$, si $f(0) = 0$.

*Demostración.*—Si $f'$ es creciente y $0 \leqslant a < b$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant ax \leqslant bx \quad \text{y} \quad f'(0) \leqslant f'(ax) \leqslant f'(bx),$$

Sea

$$g_{a,b}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ g_{a,b}(x) = b\,f(a\,x) - a\,f(b\,x),\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Es claro que $g_{a,b}(0) = 0$ y que $g_{a,b}$ es derivable. Su derivada es:

$$g'_{a,b}(x) = a\,b\,(f'(a\,x) - f'(b\,x)) \leqslant 0 \quad \text{para} \quad x \geqslant 0 \Longrightarrow g_{a,b}$$

es decreciente en $x \geqslant 0$. Por tanto, $g_{a,b}(x) \leqslant g_{a,b}(0)$ para $x \geqslant 0$. Luego $b\,f(a\,x) - a\,f(b\,x) \leqslant 0$ para $x \geqslant 0$, y de aquí $b\,f(a\,x) \leqslant a\,f(b\,x)$ para $x \geqslant 0$.

Si $f'$ es decreciente y $0 \leqslant a < b$, entonces $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant a\,x \leqslant b\,x$ y $f'(b\,x) \leqslant f'(a\,x) \leqslant f'(0)$. Tomando de nuevo $g_{a,b}$, tenemos ahora que $g'_{a,b} \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$. Luego $g_{a,b}$ es creciente para $x \geqslant 0$ y por tanto $g_{a,b}(0) \leqslant g_{a,b}(x)$ para $x \geqslant 0$. De aquí: $0 \leqslant b\,f(a\,x) - a\,f(b\,x)$ para $x \geqslant 0$.

*Nota.*—La hipótesis $f(0) = 0$ no es esencial.

*Teorema 4.10.*—Sea $f$: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$), si $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$, entonces

$$a\,f(b\,c\,x) + b\,f(a\,c\,x) + c\,f(a\,b\,x) \geqslant 0$$

ó

$$a\,f(b\,c\,x) + b\,f(a\,c\,x) + c\,f(a\,b\,x) \leqslant 0$$

para todo $x \geqslant 0$.

*Demostración.*—Sea $f' \geqslant 0$ y $g_{a,b,c}$: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_{a,b,c}(x) = a\,f(b\,c\,x) + b\,f(a\,c\,x) + c\,f(a\,b\,x)$, continua y con derivada para $x \geqslant 0$:

$$g'_{a,b,c}(x) = a\,b\,c\,(f'(b\,c\,x) + f'(a\,c\,x) + f'(a\,b\,x)).$$

De la hipótesis sobre $f' \geqslant 0 \Longrightarrow g'_{a,b,c} \geqslant 0 \Longrightarrow g_{a,b,c}$ es creciente para $x \geqslant 0$ y de aquí se tiene el resultado.

De forma similar se procede para $f' \leqslant 0$.

*Observaciones.*—1) La generalización a $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ se hace de forma obvia.

2) También podemos obtener otras generalizaciones, considerando $f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y los $a_1 \in \mathbb{R}$.

3) Integraciones con respecto a una o varias variables en los dominios adecuados, en los teoremas y corolarios que van desde 4.6 a 4.10, permiten asimismo obtener nuevas desigualdades importantes.

*Teorema 4.11.*—a) Si $f$: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en todo intervalo finito de $\mathbb{R}^+$ y si $f(0) = 0$ y $\exists\, a \in \mathbb{R} - \{1\}$, tal que, $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$a^2\,(F(x) - F(0)) \leqslant F(a\,x) - F(0)$$

o

$$F(a\,x) - F(0) \leqslant a^2 (F(x) - F(0)),$$

donde $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es una primitiva local de $f$.

b) En las mismas condiciones que en a), pero supuesto que $f(a\,x) \leqslant a\,f(x)$ ó $a\,f(x) \leqslant f(a\,x)$, $\forall\,(a, x) \in A \times \mathbb{R}^+$ con $A \subseteq \mathbb{R}^+$ intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, entonces $\forall\,a_1, a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$ se tiene

$$F(a_2\,x) - F(a_1\,x) \leqslant \frac{x\,f(x)}{2}(a_2^2 - a_1^2)$$

ó

$$\frac{x\,f(x)}{2}(a_2^2 - a_1^2) \leqslant F(a_2\,x) - F(a_1\,x)$$

para $x \geqslant 0$.

*Demostración.*—a) Se sigue por integración respecto de $x$, y b) por integración respecto de $a$. Las generalizaciones de este teorema tienen varias vertientes naturales.

5. Desigualdades de Bernoulli y Jordan.

5a) *Teorema 5.1* (Jordan).—Si $0 < |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < 1.$$

*Demostración.*—Sabemos para $\left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, $\sec^2\theta \geqslant 1$; integrando sobre el intervalo $]0, \theta[$, llegamos que $\operatorname{tg}\theta \geqslant \theta$ $\left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

De otra parte,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right) = \frac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta - \operatorname{tg}\theta) \leqslant 0 \quad \text{para} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

luego $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ es descreciente en $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. Tenemos así:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geqslant \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \ (1) \ \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Se obtiene la igualdad en (1) si y sólo si $\theta = \frac{\pi}{2}$, De otra parte, tenemos sen $\theta \leqslant \theta$ $(\theta \geqslant 0)$ (2). Combinando (1) y (2), llegamos (3)

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1 \left(0 < |\,\theta\,| \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

*Observaciones:*

1) La (3) también se puede obtener como una consecuencia de la concavidad de $\theta \longrightarrow \text{sen}\,\theta$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) La (3) puede escribirsec omo:

$$\frac{2}{\pi}\,\theta \leqslant \text{sen}\,\theta \leqslant \theta \quad \text{para} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Integrando en el intervalo $[0, \theta]$ se tiene:

$$\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3) Redheffer prueba que para $\theta$ real,

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \geqslant \frac{\pi^2 - \theta^2}{\pi^2 + \theta^2}$$

(4); la (3) y (4) no se implican mutuamente.

*Teorema 5.2* (Garnir).—Si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\text{sen}\,a}{\text{sen}\,b} < \frac{a}{b} < \frac{\text{tg}\,a}{\text{tg}\,b}.$$

*Demostración.*—I) En [1] se prueba esta desigualdad, estudiando la monotonía de $f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x}$ que decrece en

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{y } g(x) = \frac{\text{tg}\,x}{x}$$

crece en $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$.

II) *Lema.*—Si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, entonces $\forall\, x \in [0, 1]$ se tiene:

$$0 \leqslant a\,\text{sen}\,b\,x - b\,\text{sen}\,a\,x \leqslant a\,\text{sen}\,b - b\,\text{sen}\,a.$$

*Demostración.*—Sea $g_{a,b}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_{a,b}(x) = a \operatorname{sen} b\,x - b \operatorname{sen} a\,x$, para $x \in [0,1]$. Observamos que $g_{a,b}$ está bien definida y es derivable en $[0,1]$. Entonces $g_{a,b}(x) = a\,b\,(\cos b\,x - \cos a\,x)$.

Como $0 < b < a \Longrightarrow 0 < b\,x < a\,x < a < \frac{\pi}{2}$. Como coseno en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es decreciente, entonces

$$\forall\, x \in\, ]0,1[,\ \cos a\,x < \cos b\,x \Longrightarrow g'_{a,b}(x) > 0 \Longrightarrow g_{a,b}$$

es creciente en $]0,1[$. Por tanto, $g_{a,b}(0) < g_{a,b}(x) < g_{a,b}(1)$. Como $g_{a,b}(0) = 0$ y $g_{a,b}(1) = a \operatorname{sen} b - b \operatorname{sen} a$, entonces

$$0 < a \operatorname{sen} b\,x - b \operatorname{sen} a\,x < a \operatorname{sen} b - b \operatorname{sen} a \quad \text{para} \quad x \in\, ]0,1[.$$

Sea $h_{a,b}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_{a,b}(x) = a \operatorname{tg} b\,x - b \operatorname{tg} a\,x$ es continua y derivable. Entonces su derivada es:

$$h'_{a,b}(x) = a\,b \left( \frac{1}{\cos^2 b\,x} - \frac{1}{\cos^2 a\,x} \right)$$

Como $\forall\, x \in\, ]0,1[$, igual que antes tenemos,

$$\cos a\,x < \cos b\,x \Longrightarrow \cos^2 a\,x < \cos^2 b\,x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\cos^2 b\,x} < \frac{1}{\cos^2 a\,x} \Longrightarrow h'_{a,b} < 0$$

en $]0,1[ \Longrightarrow h_{a,b}$ es decreciente en $]0,1[$. Luego

$$h_{a,b}(1) < h_{a,b}(x) < h_{a,b}(0).$$

Como $h_{a,b}(1) = a \operatorname{tg} b - b \operatorname{tg} a$ y $h_{a,b}(0) = 0$, entonces para $x \in\, ]0,1[$, tenemos $a \operatorname{tg} b - b \operatorname{tg} a < a \operatorname{tg} b\,x - b \operatorname{tg} a\,x < 0$.

El teorema 5.2 es entonces una consecuencia de este lema.

*Teorema 5.3.*—Si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{b^2 \operatorname{sen} a}{a^2 \operatorname{sen} b} < \frac{a - \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{b - \operatorname{tg} \frac{b}{2}} \tag{4}$$

*Demostración.*—Por el lema anterior, si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$ y $0 \leqslant x \leqslant 1$, in tegrando entre $[0, 1]$, queda

$$a \int_0^1 (\operatorname{sen} b\,x - \operatorname{sen} b)\,d\,x < b \int_0^1 (\operatorname{sen} a\,x - \operatorname{sen} a)\,d\,x$$

y después efectuar operaciones.

*Observaciones:*

1) Si $a = 2\,b$ se tiene para $0 < b < \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2} \cos b < \dfrac{2\,b - \operatorname{tg} b}{b - \operatorname{tg} \frac{b}{2}}$

2) Si en (4), llamamos $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \mathrm{A}$ y $\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \mathrm{B}$, entonces $0 < \mathrm{A} < 1$ y $0 < \mathrm{B} < 1$ y $0 < \mathrm{B} < \mathrm{A}$, entonces

$$\frac{b^2 \dfrac{2\,\mathrm{A}}{1 + \mathrm{A}^2}}{a^2 \dfrac{2\,\mathrm{B}}{1 + \mathrm{B}^2}} < \frac{a - \mathrm{A}}{b - \mathrm{B}}$$

y de aquí

$$\frac{1 + \mathrm{B}^2}{1 + \mathrm{A}^2} \; \frac{\mathrm{A}\,b^2}{\mathrm{B}\,a^2} < \frac{a - \mathrm{A}}{b - \mathrm{B}}$$

*Teorema 5.4.*—Si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, $(\cos b)^{\frac{a}{b}} < (\cos a)^{\frac{b}{a}}\, e^{b \operatorname{tg} a - a \operatorname{tg} b}$ (5).

*Demostración.*—Utilizando el lema anterior, tenemos:

$$b\,(\operatorname{tg} a\,x - \operatorname{tg} a) < a\,(\operatorname{tg} b\,x - \operatorname{tg} b)$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Integrando respecto de $x$, extendido a $[0, 1]$, llegamos a la desigualdad.

*Observación.*—1) La integración por separado respecto de $a, b, x$, o en conjunto respecto a varias variables en los dominios adecuados, dan otras desigualdades interesantes, algunas muy útiles para el cálculo numérico.

5b) Desigualdad de Bernoulli.

*Teorema 5.5.*—a) Si $-1 < x$ y si $a < 0$, $(1 + x)^a \geqslant 1 + a\,x$.

b) Si $-1 < x$ y si $0 < a < 1$, $(1 + x)^a \leqslant 1 + a\,x$.

*Demostración.*—En [1] se prueba utilizando el desarrollo de Taylor. Sin embargo nosotros lo veremos utilizando la técnica anterior.

Sea $f$: $]-1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{L}\,(1 + x)$ es derivable en $]-1, \infty[$.

Si $0 < a < 1$, y $x > -1$, $a\,x > -a > -1 \Rightarrow a\,x \in\, ]-1, \infty[$. Además $1 + x > 0$ y $1 + a\,x > 0$, $x \in\, ]-1, \infty[$.

Sea $g_a$: $]-1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = \mathrm{L}(1 + a\,x) - a\,\mathrm{L}(1 + x)$, es derivable en $]-1, \infty[$. Por tanto,

$$g'_a(x) = \frac{a}{1 + a\,x} - \frac{a}{1 + x} = a\left(\frac{1}{1 + a\,x} - \frac{1}{1 + x}\right) =$$

$$= \frac{a\,x\,(1 - a)}{(1 + a\,x)(1 + x)} \geqslant 0 \Longrightarrow g_a$$

es creciente en $]-1, \infty[$; por tanto, en particular, $g_a(0) \leqslant g_a(x)$ para $x \leqslant 0$ y de aquí $(1 + x)^a \leqslant 1 + a\,x$.

Si $-1 < x \leqslant 0$, $g'_a(x) \leqslant 0 \Longrightarrow g_a$ es decreciente en

$$-1 < x \leqslant 0 \Longrightarrow g_a(0) \leqslant g_a(x) \Longrightarrow (1 + x)^a \leqslant 1 + a\,x.$$

De esta forma queda probado b). De forma similar se prueba a).

*Corolario 5.6.*—Si $x > -1$ y si $a > b > 1$ ó $b < a < 0$, entonces $(1 + a\,x)^b \leqslant (1 + b\,x)^a$.

*Demostración.*—Se considera $g_{a,b}$: $]-1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_{a,b}(x) = a\,\mathrm{L}(1 + b\,x) - b\,\mathrm{L}(1 + a\,x)$$

y se procede como en el teorema 5.5

Demostración similar se puede hacer para $0 < b < a < 1$ y $x > -1$.

*Observación.*—Integrando respecto a una o varias variables en dominios adecuados, se obtienen nuevas desigualdades notables.

*Teorema 5.7.*—Si $x \geqslant 0$ y $0 < a < b$, entonces $a(1 - e^{bx}) \leqslant b(1 - e^{ax})$.

*Demostración.*—Sea $f$: $[0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Sea $g_{a,b}$: $[0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_{a,b}(x) = a\,e^{bx} - b\,e^{ax}$, entonces, para $x \geqslant 0$,

$$g'_{a,b}(x) = a\,b\,(e^{bx} - e^{ax}) \geqslant 0 \Longrightarrow g_{a,b}$$

es creciente para $x \geqslant 0$ y de aquí $g_{a,b}(0) \leqslant g_{a,b}(x)$, y de aquí se tiene:

$$a(1 - e^{bx}) \leqslant b(1 - e^{ax}) \quad \text{para} \quad x \geqslant 0.$$

*Observación.*—Otras desigualdades se pueden obtener, utilizando otras funciones dentro del marco del análisis elemental, como superior.

6. Otros resultados.

*Teorema 6.1.*—Si en un intervalo $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ una función $\varphi(t)$ posee derivada $\varphi'(t)$, entonces $\varphi(t)$ es convexa en D si y sólo si $\varphi'(t)$ es creciente en D.

*Demostración.*—Ver [4], págs. 207 a 209.

*Observación.*—1) El teorema justifica las hipótesis impuestas a $f$ en todo el punto 4.

2) La convexidad de una función tiene otras caracterizaciones más débiles, como por ejemplo:

i) $f$ es convexa si y sólo si el conjunto $A(f)$ de los puntos del plano de $\mathbb{R}^2$, situados por encima del grafo de $f$, es convexo, [7], págs. 153-158.

*Teorema 6.2.*—Sea $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable o continua, creciente y si $0 \leqslant c \leqslant 1$, y si $f(c\,x) \leqslant c\,f(x)$, $\forall\,(c, x) \in [0, 1] \times [a, b]$, y si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f$, entonces $\forall\,(c, x) \in [0, 1] \times [a, b]$ se tiene:

$$F(c\,b) - c\,F(b) \leqslant F(c\,x) - c\,F(x) \leqslant F(c\,a) - c\,F(a).$$

*Demostración.*—Para todo $c \in [0, 1]$, sea $g_c\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_c(x) = F\,c\,(x) - c\,F(x)$, $x \in [a, b]$, y le aplicamos la línea de razonamiento del teorema 4.6.

*Definición 6.3.*—Sea E un espacio afín, $K \subset E$ es un cono convexo, si siempre que $x, x' \in K$ y $\lambda \geqslant 0$, $\lambda' \geqslant 0$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda\,x + \lambda'\,x' \in K$.

*Proposición 6.4.*—$f \in \mathcal{F}^*(D, A) \Longleftrightarrow -f \in \mathcal{F}_*(D, A)$.

*Demostración.*—Se sigue de las definiciones de $\mathcal{F}^*$ y $\mathcal{F}_*$.

*Teorema 6.5.*—$\mathcal{F}^*(D, A)$ y $\mathcal{F}_*(D, A)$ son conos convexos.

*Demostración.*—Hagamos la prueba sólo para $\mathcal{F}^*$. Sean $f, g \in \mathcal{F}^*$ y $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pongamos $h = \alpha\,f + \beta\,g$, entonces $\forall\,(a, x) \in A \times D$, $a\,x \in D$, entonces $h(a\,x) = \beta\,f(a\,x) + \beta\,g(a\,x)$, y de aquí,

$$h(a\,x) \leqslant \alpha\,a\,f(x) + \beta\,a\,g(x) = a\,(\alpha\,f(x) + \beta\,g(x)) = a\,h(x) \Longrightarrow h \in \mathcal{F}^*.$$

## BIBLIOGRAFIA


[1] MITRINOVIC, D. S.: *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag.
[2] BECKENBACH, E. y BELLMAN, R.: *Inequalities*. Springer-Verlag.
[3] GARNIR, I.: *Fonctions de variables réelles*. Gauthier-Villars.
[4] BERGE, C.: *Espaces topologiques, fonctions multivoques*. Dunod.
[5] CARTAN, H.: *Cálculo diferencial*, I, II. Omega.
[6] CHOQUET, G.: *Topología*. Masson-Toray.
[7] RUDIN, W.: *Análisis Real y Complejo*. Alhambra.
[8] GLAZMAN, I. y LIUBITCH, Y.: *Analyse Linéaire dans les espaces de dimensions finies*. Mir.