UN EJEMPLO DE ELEMENTO DEL ANILLO RU(n)

por

E. Reyes (*) y P. M. Gadea (**)

1. Introducción y preliminares

El objeto de esta nota, que tiene carácter didáctico, es dar con detalle un elemento del anillo de representación R U (n) del grupo unitario U (n).

Recordemos para ello, algunos conceptos conocidos (ver p. ej. Husemoller [2]).

Como es sabido, se llama representación lineal de un grupo G a un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ V,$$

siendo V un espacio vectorial.

Sea G un grupo topológico. Se llama *G-módulo* a un espacio vectorial V (sobre K = $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), junto con una acción de G como grupo de automorfismos de V. Dos G-módulos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos que conmuta con la acción de G. Sea $M_K(G)$ el conjunto de clases de isomorfismo [M] de G-módulos M sobre K. Sean M y N dos G-módulos. La suma directa $M \oplus N$ es un G-módulo, poniendo

$$s(x, y) = (s x, s y), \quad s \in G, (x, y) \in M \oplus N;$$

análogamente, el producto tensorial es un G-módulo, mediante

$$s(x \otimes y) = s x \otimes s y$$

asimismo, el producto exterior lo es, con

$$s(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r) = s x_1 \wedge \ldots \wedge s x_r.$$

(*) Departamento de Geometría, Facultad de Ciencias, Valladolid.
(**) Instituto Jorge Juan, C. S. I. C., Madrid.

Las operaciones $[M] + [N] = [M \oplus N]$ y $[M][N] = [M \otimes N]$ dotan a $M_K(G)$ de la estructura de semianillo. Las funciones λ^i tales que $\lambda^i [M] = [\Lambda^i M]$ definen una estructura de λ-semianillo sobre $M_K(G)$. Se tiene la siguiente

DEFINICIÓN.—*El anillo de representación $R_K(G)$ de un grupo topológico G es el anillo asociado con el semianillo $M_K(G)$.*

Los elementos de $R_K(G)$ son de la forma $[M] - [N]$, siendo M y N G-módulos. Además, $R_K(G)$ admite una estructura natural de λ-anillo. Cuando $K = \mathbb{C}$, se denota $R_{\mathbb{C}}(G)$ por $R(G)$; y se suele escribir $R0(G)$ cuando se trata de $R_{\mathbb{R}}(G)$.

Es de interés la determinación de R (G), para G un grupo de Lie compacto clásico. Así por ejemplo, son bien conocidas las aplicaciones de $RU(n)$ en Matemáticas —p. ej. en la K-teoría (ver Atiyah [1])—, y en Física, p. ej. en los estudios de partículas elementales (ver Zelobenko [4], Pichon [3]).

2. EL ANILLO $RU(n)$

Consideremos el grupo unitario $U(n)$. Es claro que podemos considerarlo como un grupo de automorfismos de $\mathbb{C}^n$, del modo usual. Pero se plantea de modo inmediato la pregunta: ¿Puede considerarse a $U(n)$ como grupo de automorfismos de otros espacios vectoriales, sobre $K = \mathbb{C}$ por ejemplo, que no sean necesariamente $\mathbb{C}^n$? Por ejemplo, para espacios $\mathbb{C}^m$, $m \neq n$, o para espacios obtenidos con las operaciones usuales de suma directa, producto tensorial y potencias exteriores de esos espacios $\mathbb{C}^m$, y *¿puede darse un resultado global que nos indique de «cuantas» o de «qué» maneras se puede «representar» U (n) como grupo de automorfismos de un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{C}$?* la respuesta es afirmativa. A $U(n)$ le corresponde el anillo $RU(n)$, caso particular de la anterior definición.

La determinación de $RU(n)$ tiene dos momentos decisivos:

a) $U(n)$ (y $SU(n)$) puede expresarse como unión de conjugados de un *toro maximal* T (de la máxima dimensión posible en cada caso). Es decir. si $G = U(n)$ (o $SU(n)$),

$$G = \bigcup_{s \in G} s T s^{-1}$$

resultando que la aplicación inducida de la inclusión $T \hookrightarrow G$,

$$R(G) \longrightarrow R(T),$$

es un monomorfismo. Así, el cálculo efectivo de R (G) se reduce pues al de R (T) y al del llamado *grupo de Weyl* de G, que puede definirse de modo muy simple como

$$W(G) = N_T/T$$

siendo N_T el normalizador de T. W (G) resulta ser el grupo *finito* de automor fismos interiores de T, módulo la identidad inducida por los propios elementos de T.

b) Para el cálculo de R (T) se consideran los homomorfismos de grupos

$$M(k_1, \ldots, k_n) : T^n \longrightarrow \operatorname{Aut} \mathbb{C}$$
$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \longmapsto e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n} k_j \theta_j}$$

(siendo $k, \ldots, k_n$ enteros cualesquiera) que son obviamente representaciones. Pero hay que probar que esas son todas las representaciones de T^n como elementos de Aut ($\mathbb{C}$).

Ello se prueba mediante el concepto y propiedades del *carácter* de una representación $\rho : G \longrightarrow \operatorname{Aut} V$, definido como $ch = tr \cdot \rho$, en el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[drr, "ch\rho"'] & & \operatorname{Aut} V \arrow[d, "tr = \text{Traza}"] \\ & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Llega así a probarse que

$$R(T^n) = \mathbb{Z}\,[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$$

siendo α_j la clase de

$$M(0, \ldots, \overset{(j)}{1}, \ldots, 0) : T \longrightarrow \operatorname{Aut} \mathbb{C}$$
$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \longmapsto e^{2\pi i \theta_j} \quad (\quad)$$

y α_j^{-1} la clase de

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \longmapsto e^{-2\pi i \theta_j} \quad (\quad)$$

Con esos elementos puede ya calcularse R U (n) (y S U (n)) obteniéndose que, por ser T^n el toro maximal de U (n) (y T^{n-1} el de S U (n)), y ser W (U (n)) (y W (S U (n))) el grupo de permutaciones de n elementos, que, siendo λ_i la clase en R U (n) (o R S U (n)) de la i-ésima potencia exterior $\Lambda^i \mathbb{C}^n$, donde U (n) (o S U (n)) actúa sobre $\mathbb{C}^n$ por substitución, y ρ_n denota la clase de $\mathbb{C}^n$ en R U (n), entonces $\lambda_i = \lambda^i(\rho_n)$; y se tiene:

Teorema.—(Husemoller [2])

$$R\,U(n) = \mathbb{Z}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$$

donde no hay relaciones polinómicas entre los λ_i. *Como subanillo de*

$$R(T^n) = \mathbb{Z}\,[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}],$$

se verifican las relaciones

$$\lambda_k = \sum_{i(1)<\ldots<i(k)} \alpha_{i(1)} \cdots \alpha_{i(k)}\,.$$

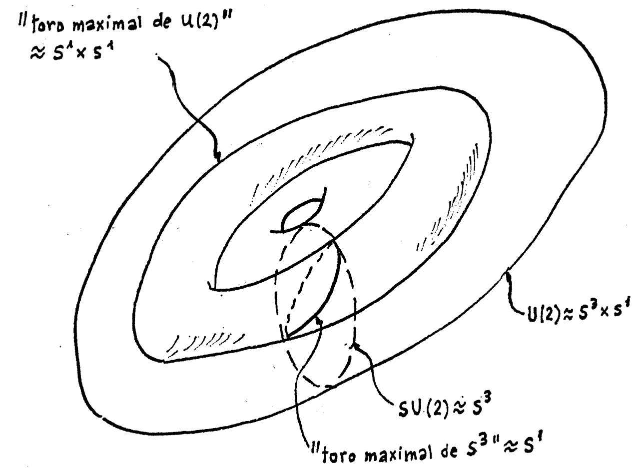
$$(\text{y es} \quad RSU\,(n) = \mathbb{Z}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}])\,.$$

3. El elemento $\rho = \lambda_1^{\,2}\,\lambda_2 + 2\,\lambda_2^{-1}$

Consideremos U (2). Tenemos R U (2) = $\mathbb{Z}\,[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2^{-1}]$. Sabemos que topológicamente,

$$U(2) \approx SU(2) \times S^1 \approx S^3 \times S^1,$$

y que el rango de S U (2), es decir, la dimensión del toro maximal es 1. Topológicamente es claro por el homeomorfismo con S^3. El rango de U (2) es 2, lo cual también puede verse por ser U (2) $\approx S^3 \times S^1$. Gráficamente, tenemos



y es, siendo R (T^2) = $\mathbb{Z}\,[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \alpha_2, \alpha_2^{-1}]$ el anillo de representación de T^2, $\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda_2 = \alpha_1\,\alpha_2$, donde α_j, $j = 1, 2$, es la clase de la representación

$$M_j : T^2 \longrightarrow \operatorname{Aut} \mathbb{C}$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longmapsto e^{2\pi i \theta_j} \quad (\quad),$$

$\alpha_1 + \alpha_2$ la clase de

$$M_1 \oplus M_2 : T^2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$$
$$(\theta_1, \theta_2) \longmapsto (e^{2\pi i \theta_1}(\ \ ),\ e^{2\pi i \theta_2}(\ \ ))$$

y $\alpha_1 \alpha_2$ la clase de

$$M_1 \otimes M_2 : T^2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$$
$$(\theta_1, \theta_2) \longmapsto e^{2\pi i \theta_1}(\ \ ) \otimes e^{2 i \theta_2}(\ \ ).$$

Veamos ahora el significado de algún elemento concreto de R U (2), sencillo pero ilustrativo, por ejemplo,

$$\rho = \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 \lambda_2^{-1}.$$

Es ilustrativo, pues aparece una suma, un producto, un exponente, un coeficiente, y todos los elementos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2^{-1}$. Entonces, $\rho = \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 \lambda_2^{-1}$ es la clase de cierta representación ρ_1 tal que

$$\rho_1 : U\,(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \wedge^2 \mathbb{C}^2 \oplus \wedge^2 \mathbb{C}^2 \oplus \wedge^2 \mathbb{C}^2) = \mathrm{Aut}\, V$$

Es decir, que los elementos de U (2) se consideran aquí generando automorfismos de un espacio vectorial de dimensión 6, como fácilmente se deduce. El problema concreto es: Dado un elemento

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in U\,(2)$$

¿qué matriz corresponde a $\rho_1(u)$? Es fácil de escribir, teniendo en cuenta las definiciones de los elementos que se manejan y mediante las reglas —ya vistas—

$$u\,(x, y) = (u\,x,\ u\,y)$$
$$u\,(x \otimes y) = u\,x \otimes u\,y$$
$$u\,(x \wedge y) = u\,x \wedge u\,y$$

cuya sentido conocemos, y será aclarado más en este ejemplo. Los elementos del espacio V serán de la forma

$$v = a_{ij}\, e_i \otimes f_j \otimes g_1 \wedge g_2 + b\, h_1 \wedge h_2 + c\, k_1 \wedge k_2$$

siendo $\{e_i\}, \{f_i\}, \ldots, \{k_i\}$, $i, j = 1, 2$, las bases canónicas de los respectivos espacios $\mathbb{C}^2$ que aparecen en la expresión de V. Entonces por operar U (2) sobre $\mathbb{C}^2$ por substitución, y ser

$$\rho = \lambda_1 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^{-1} + \lambda_2^{-1},$$

es

$$\rho_1 (u)\, v = a_{ij}\, u_{ir}\, e_r \otimes u_{js} f_s \otimes (\det u)\, g_1 \wedge g_2 + (\det u)^{-1} h_1 \wedge h_2 + $$
$$+ (\det u)^{-1} k_1 \wedge k_2 .$$

Así, la matriz 6×6 buscada es la siguiente

$$\rho_1 (u) = \begin{pmatrix} u_{11} u_{11} \det u & u_{11} u_{21} \det u & u_{21} u_{11} \det u & u_{21} u_{21} \det u & 0 & 0 \\ u_{11} u_{12} \det u & u_{11} u_{22} \det u & u_{21} u_{12} \det u & u_{21} u_{22} \det u & 0 & 0 \\ u_{12} u_{11} \det u & u_{12} u_{21} \det u & u_{22} u_{11} \det u & u_{22} u_{21} \det u & 0 & 0 \\ u_{12} u_{12} \det u & u_{12} u_{22} \det u & u_{22} u_{12} \det u & u_{22} u_{22} \det u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\det u)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\det u)^{-1} \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que u se expresa en la forma diagonalizada

$$u = \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix}$$

y consideramos la representación ρ_2 : U (2) $\longrightarrow$ Aut V dada por $u \underset{V}{\longrightarrow} \rho_2(u)$, siendo

$$\rho_2 (u) = \begin{pmatrix} e^{i(3\beta_1 + \beta_2)} & & & & & \\ & e^{i(2\beta_1 + 2\beta_2)} & & & & \\ & & e^{i(2\beta_1 + 2\beta_2)} & & & \\ & & & e^{i(\beta_1 + 3\beta_2)} & & \\ & & & & e^{-i(\beta_1 + \beta_2)} & \\ & & & & & e^{-i(\beta_1 + \beta_2)} \end{pmatrix}$$

que se obtiene simplemente haciendo

$$u_{11} = e^{i\beta_1}, \quad u_{12} = 0, \quad u_{21} = 0, \quad u_{22} = e^{i\beta_2} .$$

Escribiendo

$$\lambda_1^2 \lambda_2 + 2 \lambda_2^{-1} = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \alpha_1 \alpha_2 + 2 (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} = \alpha_1^3 \alpha_2 + 2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 +$$
$$+ \alpha_1 \alpha_2^3 + 2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} .$$

se ve que podría haberse escrito directamente $\rho_2(u)$, partiendo de su expresión diagonalizada, a partir de los exponentes de α_1 y α_2, según indica la matriz $\rho_1(u)$ anterior. Como sabemos, las representaciones

$$\rho_1 : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathrm{V}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \rho_1(u)$$

y

$$\rho_2 : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathrm{V}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & n_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \rho_2(u)$$

son equivalentes, de modo que tenemos la misma clase

$$\lambda_1^2 \lambda_2 + 2 \lambda_2^{-1}.$$

Nótese la sencillez del cálculo de la matriz $\rho_2(u)$, ya que los exponentes de α_1 y α_2 nos dan los coeficientes β_1 y β_2 en la expresión de $\rho_2(u)$.

REFERENCIAS

[1] Atiyah, M.: *K Theory*. Benjamín, 1967.

[2] Husemoller, D.: *Fibre bundles*. Mc. Graw Hill, 1966.

[3] Pichon, G.: *Groupes de Lie. Répresentations linéaires et applications*. Hermann, 1971.

[4] Zelobenko, D. P.: *Compact Lie groups and their representations*. A. M. S., 1973.