GEOMETRIA METRICA EN UN SIMPLEX DE R^n

por

MANUEL DÍAZ REGUEIRO

Comenzaré por algunas nociones elementales relativas al simplex n-dimensional a utilizar más adelante:

1) Un simplex de R^n está determinado por n vectores de R^n.

2) Tiene $n+1$ vértices y $n+1$ «caras» que son simplex de $n-1$ dimensiones.

3) Dados n vectores de R^n, $v_1, v_2, \dots, v_n$, y conocidas sus coordenadas con respecto a una base ortonormal, el volumen del paralelotopo que determinan viene dado por $V = \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

4) El volumen de un simplex de R^n, viene dado por $V = \dfrac{V_b \times h}{n}$, volumen de la base por altura dividido por n.

DEMOSTRACIÓN.—Si la altura está en la dirección del eje X y hacemos una sección mediante un hiperplano paralelo a la base en la coordenada x.

Si V_b es el volumen de la base y $V(x)$ es el volumen de la sección,

$$\frac{V_b}{h^{n-1}} = \frac{V(x)}{x^{n-1}}; \quad V = \int_0^h V(x)\, dx = \frac{V_b}{h^{n-1}} \int_0^h x^{n-1}\, dx = \frac{V_b \times h}{n}$$

5) Como consecuencia de lo anterior el volumen de un simplex de R^n, determinado por los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ vendrá dado por

$$V = \frac{\text{volumen paralelotopo } (v_1, \dots v_n)}{n!} = \frac{\det(v_1, \dots v_n)}{n!}$$

6) En R^n llamaremos vector asociado a un hiperplano a un vector ortogonal al hiperplano.

7) Dados dos hiperplanos que se corten; si consideramos dos semihiperplanos, de los cuatro en que se dividen por el corte, vamos a definir su ángulo. En primer lugar dividirán al espacio de R^n en dos partes, una interior al ángulo que forman y otra exterior. Para medir el ángulo que forman se define

como el ángulo que forman dos vectores, cada uno de ellos asociado a uno de los hiperplanos, uno de ellos con sentido hacia el semiespacio interior y el otro con sentido hacia el semiespacio exterior.

8) El término «cara» tiene aquí exclusivamente el sentido de celda limitante de $n-1$ dimensiones. «Vector», en general, será un vector libre de R^n, pero en cuanto a constituyente de un simplex, tendrá origen y extremo. Para «determinar» o diseñar un simplex dados n vectores libres de R^n, lo haremos dando un origen común a esos vectores y uniendo sus extremos entre sí.

Producto exterior de $n-1$ vectores de R^n

Dados $n-1$ vectores linealmente independientes de $R^n, v_2, v_3, \ldots, v_n$, se define su producto exterior $v_2 \times v_3 \times \ldots \times v_n$, como un vector ortogonal a cualquier hiperplano con subespacio vectorial de dirección generado por esos vectores; de módulo el volumen del paralelotopo que forman esos $n-1$ vectores; y con sentido dado por una regla determinada (que no fijaré pues los resultados que siguen son independientes del sentido con que se haya definido el producto exterior).

Si los vectores tienen las coordenadas, respecto a una base ortonormal, siguientes:

$$\begin{array}{l} v_2 = (v_{21}, \; v_{22}, \; \ldots, \; v_{2n}) \\ v_3 = (v_{31}, \; v_{32}, \; \ldots, \; v_{3n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = (v_{n1}, \; v_{n2}, \; \ldots, \; v_{nn}) \end{array}$$

entonces, el vector de R^n

$$\left(v_2 \times v_3 \; v_3 \times \ldots \times v_n = \begin{vmatrix} v_{22} \ldots v_{2n} \\ v_{32} \ldots v_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_{n2} \ldots v_{nn} \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} v_{21}, \; v_{23}, \; \ldots, \; v_{2n} \\ v_{31}, \; v_{33}, \; \ldots, \; v_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n1}, \; v_{n3}, \; \ldots, \; v_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} v_{21}, \; \ldots, \; v_{2\,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n1}, \; \ldots, \; v_{n\,n-1} \end{vmatrix} \right)$$

cumple las condiciones que hemos impuesto al producto exterior de vectores, ya que 1) es ortogonal a v_1 $(i = 2, 3, \ldots, n)$

$$v_i \cdot (v_2 \times \ldots \times v_i \times \ldots \times v_n) = \begin{vmatrix} v_{i1}, & v_{i2}, & \ldots, & v_{in} \\ v_{21}, & v_{22}, & \ldots, & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{i1}, & \ldots & \ldots, & v_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}, & \ldots & \ldots, & v_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

2) El módulo del producto exterior es igual al volumen del paralelotopo que forman los $n-1$ vectores.

Sea v_1 un vector unitario ortogonal al subespacio generado por $v_2, v_3, \ldots, v_n$ y de coordenadas $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n})$ respecto a la misma base ortonormal, entonces

$$v_1 \cdot (v_2 \times \ldots \times v_n) = \begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & \ldots, & v_{1n} \\ v_{21}, & v_{22}, & \ldots, & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}, & v_{n2}, & \ldots, & v_{nn} \end{vmatrix} = \| v_1 \| \cdot \| v_2 \times \ldots \times v_n \| \cdot \cos \alpha$$

La conclusión se deduce del hecho de que $\| v_1 \| = 1$; de que $\alpha = 0$ o π; de que el volumen de un paralelotopo es igual al determinante de los vectores que lo determinan y también al volumen de la base por la altura.

3) El sentido sigue una regla bien definida.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO EXTERIOR DE $n-1$ VECTORES

Consecuencia de su definición son:

1) Si en el producto hay dos vectores iguales, el resultado es 0.

2) Es lineal para cada uno de los factores.

3) Al cambiar 2 factores cualquiera entre sí, el producto exterior cambia de signo.

4) Si uno de los factores del producto es una combinación lineal de otros factores, el producto exterior es 0.

LEMA 1.—Dados n vectores de R^n, $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, se cumple que:

$$(v_2 - v_1) \times (v_3 - v_1) \times \ldots \times (v_n - v_1) = v_2 \times v_3 \times \ldots \times v_n -$$
$$- v_1 \times v_3 \times \ldots \times v_n - v_2 \times v_1 \times v_4 \times \ldots \times v_n - \ldots - v_2 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_1$$

Para demostrarlo sólo hay que tener en cuenta las propiedades 1 y 2 del producto exterior.

Además se puede observar que, dado un simplex de R^n determinado por esos n vectores $v_1, ..., v_n$, sus simplex-caras $n-1$ dimensionales, están determinados por los vectores

1.º) $v_2, v_3, ..., v_n$
2.º) $v_1, v_3, v_4, ..., v_n$
3.º) $v_2, v_1, v_4, ..., v_n$
4.º) $v_2, v_3, v_1, ..., v_n$
....
n.º) $v_2, v_3, v_4, ..., v_1$
$n+1$) $v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1, ..., v_n - v_1$

Es decir que en la igualdad del lema 1 aparecen los productos exteriores de los $n-1$ vectores que determinan cada uno de los simplex $n-1$ dimensionales integrantes del simplex n dimensional.

TEST DEL SENTIDO

Dados n vectores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$, con un origen común, diremos que $v_2 \times v_3 \times ... v_n$ tiene sentido hacia dentro del simplex determinado por los n vectores si $v_1 \cdot (v_2 \times v_3 ... \times v_n)$ es un número positivo; y hacia fuera del simplex si $v_1 \cdot (v_2 \times ... \times v_n)$ es negativo.

LEMA 2.—Sean $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$, los volúmenes de los simplex-cara de un simplex de R^n. Sea α_{ij} el ángulo que forman las caras i y j del simplex. Se cumple que:

$$V_1^2 = V_1 V_2 \cos \alpha_{12} + V_1 V_3 \cos \alpha_{13} + ... + V_1 \; V_{n+1} \cos \alpha_{1\,n+1}$$

(de igual forma para cualquier otra cara intercambiando los índices).

DEMOSTRACIÓN.—Sea un simplex determinado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$.
Sea V_1 el volumen del simplex determinado por $v_2, v_3, ..., v_n$,
V_2 el volumen del simplex determinado por $v_1, v_3, ..., v_n$,
V_3 el volumen del simplex determinado por $v_2, v_1, v_4, ..., v_n$
....

V_{n+1} el volumen del simplex determinado por $v_2 - v_1, v_3 - v_1, ..., v_n - v_1$.
En este caso,

$$V_1 = \frac{\| v_2 \times v_3 \times ... \times v_n \|}{(n-1)!}$$

$$V_2 = \frac{\| v_1 \times v_3 \times ... \times v_n \|}{(n-1)!}$$

....

$$V_{n+1} = \frac{\| (v_2 - v_1) \times (v_3 - v_1) \times ... \times (v_n - v_1) \|}{(n-1)!}$$

Entonces, si el lema 1 lo escribimos

$$v_2 \times v_3 \times \ldots \times v_n = (v_2 - v_1) \times (v_3 - v_1) \times \ldots \times (v_n - v_1) +$$
$$+ v_2 \times v_1 \times v_4 \times \ldots \times v_n + v_2 \times v_3 \times v_1 \times \ldots \times v_n +$$
$$+ \ldots + v_2 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_1 + v_1 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_n$$

y multiplicando escalarmente esta igualdad por $v_2 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_n$, denotando,

$$\begin{aligned} u_1 &= v_2 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_n \\ u_2 &= v_1 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= v_2 \times v_3 \times v_4 \times \ldots \times v_1 \\ u_{n+1} &= (v_2 - v_1) \times (v_3 - v_1) \times \ldots \times (v_n - v_1) \end{aligned}$$

resulta

$$\| u_1 \|^2 = \| u_1 \| \cdot \| u_2 \| \cos(u_1, u_2) + \| u_1 \| \cdot \| u_3 \| \cos(u_1, u_3) + \ldots +$$
$$+ \| u_1 \| \cdot \| u_n \| \cos(u_1, u_n) + \| u_1 \| \cdot \| u_{n+1} \| \cos(u_1, u_{n+1}).$$

Aplicamos ahora el test del sentido; si $v_1 \cdot u_1$ es, por ejemplo, positivo, es decir, el vector u_1 tiene el sentido hacia dentro del simplex, entonces, $v_2 \cdot u_2 = - v_1 \cdot u_1$ y u_2 está dirigido hacia fuera del simplex. Idem con u_3, ya que $v_3 \cdot u_3 = - v_1 \cdot u_1$, con u_4, etc., hasta u_n, ya que $v_n \cdot u_n = - v_1 \cdot u_1$. Por último, para saber el sentido de u_{n+1} lo multiplicamos escalarmente por $- v_1$ (vector del simplex con el mismo origen que los factores de u_{n+1}) y resulta $- v_1 \cdot u_{n+1} = - v_1 \cdot u_1$ (sin más que efectuar las operaciones). Luego u_{n+1} está dirigido hacia fuera del simplex.

De aquí el ángulo $(u_1, u_2) = \alpha_{12}$, ya que α_{12} es el ángulo del semihiperplano que contiene al simplex 1 con el que contiene al 2, y, por definición, es el ángulo que forman dos vectores, cada uno de ellos asociado a un hiperplano, y, con sentido, uno hacia el semiespacio interior y otro hacia el semiespacio exterior (tal y como cumplen u_1 y u_2, como hemos comprobado con el test del sentido). De igual forma,

$$\begin{aligned} (u_1, u_3) &= \alpha_{13} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (u_1, u_n) &= \alpha_{1n} \\ (u_1, u_{n+1}) &= \alpha_{1\,n+1} \end{aligned}$$

Luego podemos escribir

$$\| u_1 \|^2 = \| u_1 \| \cdot \| u_2 \| \cos \alpha_{12} + \| u_1 \| \cdot \| u_3 \| \cos \alpha_{13} + \ldots +$$
$$+ \| u_1 \| \cdot \| u_{n+1} \| \cos \alpha_{1\,n+1}$$

Dividiendo ahora esta igualdad por $((n-1)!)^2$, resulta

$$V_1^2 = V_1 V_2 \cos \alpha_{12} + V_1 V_3 \cos \alpha_{13} + \dots + V_1 V_{n+1} \cos \alpha_{1n+1} .$$

TEOREMA 1.—En un simplex de R^n, cuyos simplex-caras tengan de volumen $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$, tenemos que:

$$V_1^2 + \dots + V_i^2 - 2 V_1 V_2 \cos \alpha_{12} - \dots - 2 V_1 V_i \cos \alpha_{1i} - \dots -$$
$$- 2 V_{i-1} V_i \cos \alpha_{i-1,i} = V^2_{i+1} + \dots + V^2_{n+1} - 2 V_{i+1} V_{i+2} \cos \alpha_{i+1,i+2} -$$
$$- \dots - 2 V_n V_{n+1} \cos \alpha_{n,n+1}$$

DEMOSTRACIÓN.—Dadas las $n+1$ igualdades,

$$V^2_1 = V_1 V_2 \cos \alpha_{12} + \dots + V_1 V_{n+1} \cos \alpha_{1,n+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$V^2_{n+1} = V_1 V_{n+1} \cos \alpha_{1,n+1} + \dots + V_n V_{n+1} \cos \alpha_{n,n+1}$$

sustituyéndolas en la igualdad que queremos probar, comprobamos que se verifica, dando, los dos lados de la igualdad,

$$2 V_1 V_{i+1} \cos \alpha_{1i+1} + \dots + 2 V_i V_{n+1} \cos \alpha_{in+1}$$

COROLARIO.—Ya que en la fórmula del teorema 1 ni el número i, ni el orden $1, 2, 3, \dots, n$, son esenciales en la demostración, esa fórmula se podrá escribir variando i desde 1 hasta n. Y, para cada i, permutando los índices obtendremos fórmulas diferentes.

Como ejemplo en R^4 tenemos las fórmulas

$$V^2_1 = V^2_2 + V^2_3 + V^2_4 + V^2_5 - 2 V_2 V_3 \cos \alpha_{23} - 2 V_2 V_4 \cos \alpha_{24} -$$
$$- 2 V_2 V_5 \cos \alpha_{25} - 2 V_3 V_4 \cos \alpha_{34} - 2 V_3 V_5 \cos \alpha_{35} - 2 V_4 V_5 \cos \alpha_{45}$$

$$V^2_1 + V^2_2 - 2 V_1 V_2 \cos \alpha_{12} = V^2_3 + V^2_4 + V^2_5 - 2 V_3 V_4 \cos \alpha_{34} -$$
$$- 2 V_3 V_5 \cos \alpha_{35} - 2 V_4 V_5 \cos \alpha_{45}$$

y todas las permutaciones de índices que queramos en éstas nos dan nuevas fórmulas.

TEOREMA 2.—Si en un simplex de R^n tenemos que $\alpha_{ij} = 90^\circ$, $i \neq j$, $i \leqslant k$, $j \leqslant k$, y también que $\alpha_{lm} = 90^\circ$ para $l \neq m$. $l > k$, $m > k$. Entonces

$$V^2_1 + V^2_2 + \dots + V^2_k = V^2_{k+1} + V^2_{k+2} + \dots + V^2_{n+1}$$

DEMOSTRACIÓN.—Trivial.

NOTA.—Se verifica el teorema igual si, en todo su enunciado, hacemos una permutación de índices.

Ejemplo, en

$$R^4, \; V^2{}_1 = V^2{}_2 + V^2{}_3 + V^2{}_4 + V^2{}_5 \quad \text{si} \quad \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = 90^\circ .$$

Y

$$V^2{}_1 + V^2{}_2 = V^2{}_3 + V^2{}_4 + V^2{}_5 \quad \text{si} \quad \alpha_{12} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = 90^\circ ,$$

o cualquier otra fórmula resultante de éstas permutando los índices.

BIBLIOGRAFIA

HERMANN GRASSMANN: *Teoría de la extensión*. Espasa Calpe, 1947.
ERNST PESCHL: *Geometría Analítica y álgebra lineal*, Selecciones Científicas. Madrid, 1970.