ALGUNAS PROPOSICIONES FINITA Y FORMALMENTE INDEMOSTRABLES

por

JUAN-ESTEBAN PALOMAR TARANCÓN

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se construyen algunas proposiciones sencillas y de fácil comprensión, para las cuales no existe ninguna demostración formal y finita. Su indemostrabilidad se establece por medio de un sencillo procedimiento para determinar el número mínimo de elementos necesarios para su demostración.

I

Conviene establecer sin ambigüedades, qué es lo que entendemos por «demostración formal»:

Por una parte, convendremos en que demostrar una proposición consiste en obtenerla de otras aceptadas como verdaderas (axiomas o teoremas), por medio de algún procedimiento de derivación, que garantice la veracidad de la proposición obtenida. Un tal procedimiento de derivación consistirá en un conjunto de leyes o reglas que aplicadas a una proposición obtenida. Un tal procedimiento de derivación consistirá en un conjunto de leyes o reglas que aplicadas a una proposición verdadera la traduzcan en otra (consecuencia) también verdadera

Por otra parte, convendremos en que una demostración «formal» consistirá en un procedimiento de derivación, que actúe sobre un lenguaje simbólico, en el cual se expresan las proposiciones manejadas, con independencia de la existencia o no existencia de un modelo, por consiguiente, con independencia del significado de los símbolos manejados. Consecuentemente, debemos establecer, en primer lugar, qué tipo de lenguajes simbólicos vamos a considerar.

LENGUAJES

Un lenguaje $\mathcal{L}$ estará constituido de los siguientes conjuntos de símbolos:

a) Un alfabeto finito $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ y su correspondiente conjunto de palabras A^*.

b) Un conjunto X a cuyos elementos llamaremos «símbolos de variables». Cada elemento de X, es decir, cada variable será la representación genérica de un subconjunto de A*, lo que expresaremos diciendo que la variable $x \in X$ toma valores de $A' \subset A^*$.

c) Un conjunto $\mathcal{F}$ a cuyos elementos llamaremos «símbolos funcionales», con los cuales expresaremos aplicaciones, leyes de composición, etc.

d) Un conjunto $\mathcal{R}$ a cuyos elementos llamaremos «símbolos de relación» con los cuales representaremos relaciones en general. Supondremos siempre que $\mathcal{R}$ contiene los símbolos usuales de igualdad $=$, Pertenencia $\in$, inclusión $\subset$, implicación $\Rightarrow$, equivalencia $\Leftrightarrow$, etc.

NOTA.—Una proposición arbitraria P, diremos que pertenece a un lenguaje $\mathcal{L}$, si puede expresarse por medio de los símbolos de $\mathcal{L}$.

DEFINICIÓN NÚM. 1.—Llamaremos «regla de derivación», en un lenguaje determinado $\mathcal{L}$, a toda ley que aplicada a una proposición de $\mathcal{L}$ la transforme en otra proposición de $\mathcal{L}$. Si representamos por $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ al conjunto de todas las proposiciones de $\mathcal{L}$, podemos definir una regla de derivación como una aplicación de un subconjunto E de $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ en $\mathcal{P}(\mathcal{L}) : r : E \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$.

DEFINICIÓN NÚM. 2.—Una regla de derivación diremos que es «admisible» si transforma toda proposición verdadera, de su dominio de definición, en otra proposición verdadera.

DEFINICIÓN NÚM. 3.—Llamaremos «regla de derivación formal» a aquella que pueda formularse como un simple cambio de símbolos del lenguaje considerado, es decir, cuando la imagen de una proposición P, a la que se aplica la regla correspondiente, se obtenga cambiando la ocurrencia de algunos símbolos de $\mathcal{L}$, en la expresión de P, por la ocurrencia de otros símbolos distintos o de los mismos en diferente orden.

De manera análoga, llamaremos «regla de derivación formal admirable» a aquella que transforme toda proposición verdadera en otra también verdadera.

EJEMPLO NÚM. 1.—En un grupo multiplicativo la regla que consiste en sustituir los símbolos $a\,a$ por a^2 es formal y admisible; por ejemplo, la relación

$$a\,a = c \tag{1}$$

la transforma en la

$$a^2 = c \tag{2}$$

y, efectivamente, si (1) es verdadera lo es (2).

EJEMPLO NÚM. 2.—En un grupo multiplicativo abeliano, la regla que consiste en sustituir toda ocurrencia de los símbolos $x\,y$ por una ocurrencia de los símbolos $y\,x$, es decir, los mismos, pero en distinto orden, transforma la relación

$$x\,y = c \tag{3}$$