LA INDUCCION EN EL BACHILLERATO

por

J. B. ROMERO MÁRQUEZ

(Conclusión)

OBSERVACIONES.—

1) La variable i que aparece en el teorema 1 es algunas veces llamada variable de inducción y el procedimiento es llamado como una demostración por inducción sobre i.

2) Hemos visto que sumando 1 al entero k se obtiene en entero $k + 1$ que es mayor que k, pero no existe ningún entero que sea el mayor de todos. Sin embargo, partiendo de 1, se alcanzan todos los enteros positivos, después de un número finito de pasos, pasando sucesivamente de k a $k + 1$. Esta es la base intrínseca del método de inducción. Por ello, el «método de inducción» consiste: Sea $P(n)$ una afirmación que contiene al entero n; se puede concluir que $P(n)$ es verdadera para cada $n \geqslant n_1$, si es posible probar los dos teoremas siguientes:

(a) Probar que $P(n_1)$ es cierta y

(b) Probar, que supuesta $P(k)$ es cierta, siendo k un entero arbitrario pero fijado $\geqslant n_1$ que $P(k + 1)$ es cierta.

En la práctica, n_1 es generalmente 1. La justificación de este método tiene varias formulaciones alternativas, como la que sigue:

«Principio de inducción matemática».—«Sea $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ que tiene las propiedades: (1) $1 \in S$ y (2) si un entero k pertenece a S, también $k + 1 \in S$, entonces cada entero positivo pertenece a S.»

DEMOSTRACIÓN.—Sea P el conjunto de los enteros positivos que pertenecen a S. Se trata de ver que $P = \mathbb{N}$. Introducimos antes de continuar con la demostración, el concepto de conjunto inductivo: «$S \subseteq \mathbb{R}$ es inductivo si (1) si $1 \in S$ y (2) si $x \in S$, entonces $x + 1 \in S$. Ejemplo $\mathbb{R}$ es un conducto inductivo. De otra parte un número real se denomina número natural si pertenece a cada conjunto inductivo de $\mathbb{R}$. Se puede probar que todos los números naturales son positivos y que este método es equivalente a la introducción de $\mathbb{N}$ por los axiomas de Peano o cualquier método equivalente.»

Continuando con nuestra demostración tenemos:

Como cada entero positivo pertenece a cada conjunto inductivo, basta probar que P es un conjunto inductivo. Ahora por (1) sobre S, resulta $1 \in$ P. Supongamos ahora que un entero $k \in$ P; entonces k está en S y por (2) sobre S, $k+1 \in$ S. Pero como $k+1$ es un entero positivo, $k+1 \in$ P y P es así un conjunto inductivo igual a $\mathbb{N}$.

Es importante señalar que un conjunto inductivo de $\mathbb{R}$ puede contener números reales que no son enteros positivos. Por ejemplo $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos inductivos.

Para finalizar el teorema que hemos llamado «principio de inducción matemática, dice: «que el conjunto de los enteros positivos es un conjunto inductivo mínimo».

3) Para un esquema no matemático de la idea de la inducción se puede ilustrar con el dibujo de la figura 1.

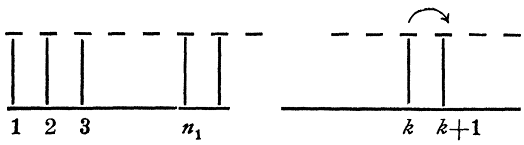

Fig. 1.

Supongamos una fila de fichas de dominó situadas de perfil y numeradas consecutivamente, que se extiende indefinidamente hacia la derecha, ver [3] y [4].

Supongamos que están dispuestas de tal manera que si una de ellas cae, por ejemplo, el señalado con el símbolo k, choca con el siguiente señalado con $k+1$. En seguida se intuye que si fuera empujada hacia atrás la primera derribaría todas las demás fichas. También es claro que si fuera empujada hacia atrás una ficha que no fuera la primera, por ejemplo la señalada con n_1, todas las fichas posteriores a ella caerían.

4) Cuando se efectúa la demostración de una afirmación P(n) para todo entero $n \geqslant 1$, por inducción matemática, se aplica el teorema.

Teorema 2.—(Principio de buena ordenación o $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado).—Cada conjunto no vacío de enteros $J \subseteq \mathbb{N}$ contiene un entero j (llamado mínimo elemento o primer elemento), tal que para todo $i \in J$, $j \leqslant i$.

Demostración.—(Por inducción sobre el cardinal de J).—Base.—Para el caso que cardinal de $J = 1$, $J = \{j\}$ y el teorema es evidente. Etapa de inducción.— La hipótesis de inducción es que, para todo $k \geqslant 1$, cada conjunto de enteros de cardinal k contiene un mínimo elemento.

Sea J cualquier conjunto de enteros de cardinal $k+1$. Podemos evidentemente escribir: $J = \tilde{J} \cup \{j'\}$, donde card $\tilde{j} = k$ y donde, por hipótesis de inducción, existe un entero $j \in \tilde{J}$ tal que $j \leqslant i$ para todo $i \in \tilde{J}$. Ahora, si $j \leqslant j'$, entonces $j \leqslant i$ para todo $i \in J$; si $j' \leqslant j$, entonces $j' \leqslant i$ para todo $i \in J$. Así, el teorema es cierto para J, con cardinal $J = k+1$.

Observaciones.—

1) Los enteros positivos $\mathbb{N}$ tienen otra propiedad importante llamada «prin-

cipio de buena ordenación», visto en teorema 2 y que se utiliza como base para las demostraciones por inducción.

Dicho principio de buena ordenación es lógicamente equivalente al principio de inducción.

Como lo hemos presentado aquí en el teorema 2, se deduce del teorema 1, pero también a la recíproca. La equivalencia del teorema 1 y 2 se puede ver en [3], [18] y [5]. Tanto el teorema 1 como el teorema 2, se pueden tomar como axioma que define al conjunto $\mathbb{N}$.

Aplicaciones del teorema de inducción y el principio de buena ordenación.

Teorema 3.—Sea r un entero positivo, y sean $a_0, a_1, \ldots, a_j$, enteros no negativos menores que r. Entonces, para todo $j \geqslant 0$, se tiene:

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_j r^j < r^{j+1}.$$

Demostración.—(por inducción sobre j).—Base: para $j = 0$, el teorema es verdadero, ya que $a_0 < r$. Etapa de inducción: la hipótesis de inducción es que, para todo $k \geqslant 0$,

$$a_0 + a_1 r + \ldots + a_k r^k < r^{k+1}.$$

De aquí:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 r + \ldots + a^k r^k + a_{k+1} r^{k+1} &= (a_0 + a_1 r + \ldots + a_k r^k) + a_{k+1} r^{k+1} < \\ < r^{k+1} + a_{k+1} r^{k+1} &= (1 + a_{k+1}) r^{k+1} \leq r \cdot r^{k+1} = r^{k+2} \end{aligned}$$

ya que $1 + a_{k+1} \leqslant r$, que prueba el teorema para $j = k + 1$.

Teorema 4.—(Teorema de la división).—Para cualquier entero $n \geqslant 0$ y $m > 0$, existen enteros únicos $q \geqslant 0$ y r, tal que, $n = m q + r$ donde $0 \leqslant r < m$.

Demostración.—Sea $J = \{ j \in \mathbb{N} \mid n = m v + j,\ j \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \}$, conjunto de los enteros no negativos; como $J \neq \Phi$, ya que por lo menos $n \in J$, tendrá por el teorema 2 un mínimo elemento que designamos por r.

De aquí, existen, $r \geqslant 0$ y $q \geqslant 0$ tal que $n = m q + r$. Ahora, si hacemos la hipótesis que $r \geqslant m$, entonces, para cierto a tal que $0 \leqslant a < r$, tendremos $r = m + a$. De aquí, $n = m q + r = m q + m + a = m (q + 1) + a$, de donde $a \in J$. Pero esto contradice el hecho de que $r > a$, era r el mínimo elemento de J. De aquí deberemos tener $r < m$.

Para probar la unicidad, supongamos que pudiéramos escribir:

$$n = q m + r = q' m + r',$$

donde $0 \leqslant r < m$, $0 \leqslant r' < m$. Por tanto, $(q - q') m = r' - r$. Sin perder generalidad, podemos admitir que $q \geqslant q'$. Si $q > q'$, $q - q' > 0$, y $r' - r \geqslant m$. De todo lo anterior $r' \geqslant m$ y por tanto tenemos contradicción. Ello lleva a que $q = q'$ y $r = r'$; las cantidades q y r se llaman respectivamente, cociente y resto obtenido por división de n y m.

TEOREMA 5 (el segundo principio de inducción finita).—

Sea P (i) un enunciado o proposición tal que, para cada entero positivo i, es cierta o falsa. Para probar que P (i) es verdadera para todos los enteros $i \geqslant i_0$ es suficiente probar que:

(i) Base.—P (i_0) es verdadera.

(ii) Etapa de inducción.—Para $k \geqslant i_0$, si admitimos que P (i) es verdadera para $i = i_0, i_0 + 1, \ldots, k$ (llamada hipótesis de inducción) implica que P ($k + 1$) es cierta.

DEMOSTRACIÓN.—Definimos los conjuntos

$$I = \}i \in \mathbb{N} \mid i \geq i_0\{ \quad \text{y} \quad J = \}i \in I \mid P(i) \text{ es falsa.}\{$$

Si $J \neq \Phi$, entonces por el teorema 2, tendrá un mínimo elemento que llamamos j. Si la condición (1) en el teorema se verifica, $i_0 \notin J$; de aquí, $j > i_0$. Así, P (i) es también verdadera para $i = i_0, i_0 + 1, \ldots, j - 1$, donde $j - 1 \geqslant i_0$.

Si la condición (ii) se verifica, entonces la verdad de P (i) para $i = i_0, i_0 + 1, \ldots, j - 1$, implicará la verdad de P (j), que contradice al hecho de que $j \in J$ y de aquí que fuera $J \neq \Phi$. En conclusión, $J = \Phi$ y P (i) es verdadera para todo $i \geqslant i_0$.

TEOREMA 6.—(Principio de doble inducción).—

Sea P (i, j) un enunciado o proposición, tal que para cada entero i y cada entero j puede ser cierta o falsa. Para probar que P (i, j) es cierto para todos los enteros $i \geqslant i_0$ y $j \geqslant j_0$, es suficiente probar: (i) Base: P,(i_0, j_0) es cierta y (ii) Etapa de inducción.—Para todo $k \geqslant i_0$ y $l \geqslant j_0$, si admitimos que P (k, l) es cierta (llamada hipótesis de inducción) implica que P ($k + 1, l$) y P ($k, l + 1$) son ciertas.

La demostración del teorema 6, se obtiene de los teoremas 1 y 2. Un buen ejercicio de este principio de doble inducción es: demostrar que $2^{mn} > m^n$ si $m \geqslant 1, n \geqslant 1$.

OBSERVACIONES. 7

Definiciones recursivas o recurrentes.—Veamos como los principios de inducción finita pueden ser utilizados para la «definición», esto es, para la computación y construcción de varias entidades cuyos valores o estructuras son funciones de argumentos enteros positivos.

TEOREMA 7.—Sea E (i) una entidad tal que para cada entero i, puede ser bien definida o no definida. Entonces E (i) está definida para todos los enteros $i \geqslant i_0$ si:

(i) Base: E (i_0) está definida,

(ii) Etapa de inducción: Para cada $k \geqslant i_0$, la afirmación que E (i) está definida para

$$i = i_0, i_0 + 1, i_0 + 2, \ldots, k,$$

implica que está definida.

Este teorema se sigue del segundo principio de inducción o teorema 5.

El teorema 7, sugiere el método siguiente para la definición de una entidad E (i) para todo entero $i \geqslant i_0$:

(i) Base: definimos E (i_0),

(ii) Etapa de inducción: Para cada $i \geqslant i_0$, definimos E $(i+1)$ en términos de

$$E(i_0), \quad E(i_0+1), \ldots E(i).$$

Una definición expresada en esta forma es llamada una definición recursiva; E (i) se dice recursivamente definida y este método se emplea mucho en matemáticas y en particular en el cálculo en diferencias finitas y en la elaboración de ornigramas de programación.

Ejemplo.—Los números de Fibonacci F_i $(i \geqslant 0)$, están definidos recursivamente por:

Base:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

Etapa de inducción:

$$F_{i+1} = F_{i-1} + F_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Para finalizar esta sección, recomendamos por su gran cantidad de ejercicios e ideas [1], [9], [10].

3. Otras cuestiones sobre $\mathbb{N}$ y nuevos matices sobre el principio de inducción

3a. Un problema de Hilbert o el significado de los conjuntos finitos e infinitos.—«Supongamos que, en un cierto hotel, todas las habitaciones están ocupadas y que cada habitación es unipersonal. Si es un hotel finito, y si llega otra persona más en busca de habitación, es imposible satisfacer su demanda. Pero si es un hotel con infinitas habitaciones, no habrá ningún impedimento para acomodarlo. Supongamos que las habitaciones están numeradas, 1, 2, 3, ..., con una habitación para cada entero positivo.

Si llega un nuevo huésped, simplemente pedimos al huésped de la habitación n que se mude a la habitación $n+1$. El huésped número 1 se mudará a la habitación 2, el huésped número 2 a la habitación 3, etc. Esto dejará vacante la habitación 1 y podremos ubicar en ella al recién llegado. Más aún si el número de huéspedes que llegan es igual al de huéspedes que ya hay en el hotel, no debe inquietarnos. Pedimos simplemente al huésped número n que se mude a la habitación $2n$. Con esto quedarán libres todas las habitaciones de número impar, en las cuales podemos acomodar al número infinito de huéspedes recién llegados, ver [23].

Este ejemplo nos da pie a introducir el concepto de conjunto finito y el concepto de conjunto de los números enteros naturales desde otra vertiente.

Definimos para ello, la equipotencia de conjuntos en el sentido de G. Cantor-

Dedekind; se prosigue con el concepto de cardinal o potencia de un conjunto. Entre los números cardinales figuran los notados por los símbolos $0, 1, 2, 3, \ldots$, pero que no son, naturalmente, los números $0, 1, 2, \ldots$, «habituales» o inductivos (en el sentido de que los enteros «usuales» son ideas metafísicas deducidas de la experiencia concreta, mientras que los enteros «matemáticos» son objetos deducidos teóricamente por medios de):

$$0 = \text{card}\,(\Phi), \quad 1 = \text{card}\,(\{\Phi\}), \quad 2 = \text{card}\,(\{\Phi, \{\Phi\}\}) \ldots \text{ etc} \ldots$$

Después se define el orden y las operaciones con cardinales y se prueba que para todo cardinal x se tiene $x < 2^x$. Finalmente se llega a caracterizar los conjuntos finitos y el conjunto de los enteros naturales positivos, con los siguientes teoremas:

(i) Sea X un conjunto, las propiedades siguientes son equivalentes:

1a) El único conjunto contenido en X y equipotente a X es el propio X (esto es X no es equipotente con ninguna de sus partes propias),

1b)

$$\text{card}\,(X) \neq \text{card}\,(X) + 1.$$

Así, un conjunto X es finito si verifica 1a) o 1b), e infinito si no las tiene. Lo mismo un cardinal x es finito si $x \neq x + 1$, e infinito si $x = x + 1$. Un cardinal finito se llama también un número natural y a un cardinal infinito se llama número transfinito.

El conjunto de los números naturales.—De todo lo anterior, vemos que existen conjuntos finitos, ya que los conjuntos

$$\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \ldots$$

son finitos; por lo demás, es en este momento cuando vemos que la matemática toma forma, a pesar de que todo lo anterior se basa en la noción de conjunto vacío. Se establece para $\mathbb{N}$ el siguiente teorema:

(2) Existe un conjunto $\mathbb{N}$ y sólo uno tal que la relación $x \in \mathbb{N}$, es equivalente a la relación x es un entero natural. El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

De aquí: existe al menos un conjunto infinito, equivalente a decir que existe un conjunto cuyos elementos son los enteros naturales.

Al cardinal, card ($\mathbb{N}$), se le llama potencia del numerable y se dice que un conjunto X es numerable si es equipotente a $\mathbb{N}$, esto es, si existe una biyección de $\mathbb{N} \longrightarrow X$, para más detalles sobre 3a), ver [19] y [22].
$n \longrightarrow x_n$

3b) *El problema de G. Polya y otro similar*

Polya propuso encontrar el error en la siguiente «demostración por inducción»:

PROBLEMA 1.—Dado un conjunto de n niñas rubias, si por lo menos una de las niñas tiene los ojos azules, entonces las n niñas tienen los ojos azules.

Demostración.—La proposición es evidentemente cierta para $n = 1$, por hipótesis, ya que en el caso de que el conjunto tenga una sola niña rubia, tiene que ser necesariamente de ojos azules. De otra parte el paso de k a $k + 1$, lo vamos a ilustrar al caso particular de $n = 3$, a $n = 4$. Supongamos para ello que la proposición es cierta para $n = 3$, y sean N_1, N_2, N_3, N_4, cuatro niñas rubias tales que una de ellas por lo menos, tenga los ojos azules, por ejemplo la N_1. Tomamos N_1, N_2, N_3 conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para $n = 3$, resulta que N_2 y N_3 tienen los ojos azules. De otra parte repitamos el proceso con N_1, N_2 y N_4, se encuentra igualmente que N_4 tiene ojos azules. Es decir, las cuatro tienen ojos azules.

Un razonamiento análogo por «inducción», permite el paso de k a $k + 1$ en general. De aquí podemos concluir:

Corolario.—Todas las niñas rubias tienen los ojos azules.

Demostración.—Puesto que efectivamente existe una niña rubia con ojos azules, se puede aplicar el resultado precedente al conjunto formado por todas las niñas rubias.

Es evidente que la clave del asunto está en el paso de la inducción para $n = 2$, ya que en este caso la proposición no puede ser verificada que sea cierta, es decir que se deduzca del caso $n = 1$, ver [5] págs. 26 y 27.

Problema 2.—«Todos los ciudadanos son tratados igual por la ley.»

Demostración.—(Por inducción sobre el número i de ciudadanos). Base: cuando $i = 1$ hay un solo ciudadano, y el teorema es trivialmente cierto. Etapa de inducción: Supongamos que el teorema es cierto para k ciudadanos cualesquiera y consideremos cualquier grupo de $k + 1$ ciudadanos, designados por $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}$. Por hipótesis de inducción $C_1, C_2, \ldots, C_k$ son tratados igualmente por la ley y lo mismo les ocurre, $C_2, C_3, \ldots, C_{k+1}$. De aquí, el tratamiento de $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}$, por la ley es el mismo, ya que lo es C_2, y de aquí, todos los ciudadanos son tratados igual. Así, el teorema es cierto para $i = k + 1$.

Es claro que la proposición o problema 2 es similar al problema 1, y es evidente que la clave de esta falacia está en C_2, es decir, en la inducción de $i = 1$ a $i = 2$.

3c) Observaciones finales sobre la inducción matemática.

Como veremos más adelante, la inducción empírica de las ciencias naturales procede de una serie particular de observaciones de un cierto fenómeno para establecer una proporción o ley general que debe regir todas las posibilidades del fenómeno. Es claro que el grado de certeza con que se establece dicha ley depende del número de observaciones particulares y confirmaciones del fenómeno. Este tipo de razonamiento inductivo es con frecuencia plenamente convincente, la predicción de que mañana el sol hará su salida por el Oriente o que todos los cisnes son blancos, tiene toda la certeza posible, pero el carácter de esta proposición no es el mismo que el de un teorema probado, con razonamientos estrictamente lógicos o matemáticos.

Así, por ejemplo, L. Euler consideró el trinomio $f(x) = x^2 + x + 41$. Dando a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, obtenemos respectivamente los números primos, 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. ¿Podemos inferir que para todo $x \in \mathbb{N}$, $f(x)$ es primo? Observamos que $f(i)$ para i entre $0 \leqslant i \leqslant 39$, son números primos, pero sin embargo, $f(40) = 41^2$, es un número compuesto. De aquí concluimos que una proposición que se verifica para valores particulares, no es necesariamente cierta para todo $i \in \mathbb{N}$.

Más general, se puede probar que cualquier fórmula del tipo

$$f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k \quad \text{con,} \quad a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z},\ a_0 \neq 0,$$

no puede dar exclusivamente números primos, ver [20] pág. 96.

De otra parte consideremos los números de Fermat,

$$F_n = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, \ldots ;$$

Fermat conjeturó que todos los números de esta forma son números primos. La proposición es cierta para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, pero L. Euler probó que $F_5 = 641 \cdot 6700417$, es un número compuesto; ver otros ejemplos en [9]. Todavía hoy, dicha conjetura no está del todo resuelta, tanto afirmativamente como negativamente, ya que no se sabe para qué valores de n, F_n es primo o compuesto.

De todo lo anterior concluimos que una proposición matemática que es válida para una serie de casos particulares, por muy grande que sea, no tiene por que ser necesariamente cierta, a menos que podamos encontrar una demostración matemática de la misma. Este defecto de creer demostrado un teorema matemático, con la comprobación o verificación de la certeza de dicho teorema, para un número finito de casos particulares, es frecuente que lo presenten los alumnos que llegan al instituto procedentes de la E. G. B. Este es uno de los numerosos entuertos que tenemos que deshacer los profesores de matemáticas en el BUP.

El problema de Polya nos hace pensar que cuando los alumnos manejan el principio de inducción, deben ser extremadamente cautos en sus afirmaciones, ya que, insistimos de nuevo, que toda demostración que se basa en el principio de inducción matemática, se denomina demostración por inducción, y que tal demostración consta necesariamente de dos partes a verificar por separado en cada caso concreto y que son: a) la proposición es cierta para $n = 1$ y b) la proposición es válida para $n = k + 1$ si lo es para $n = k$, donde k es un número natural arbitrario.

Cuando a) y b) han sido demostrados, podemos afirmar, en virtud del principio de inducción matemática, que la proposición es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así en el ejemplo de Fermat y en los de Eulér y Polya vistos antes, no se verifica o mejor dicho, hemos despreciado la comprobación de la parte b) de la inducción.

Veamos otros ejemplos que permiten matizar la inducción matemática.

«Probar que dos números enteros positivos cualesquiera son iguales». Sea para ello, $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b$ y definimos máx (a, b) al mayor de a y b; si $a = b$, máx $(a, b) = a$.

Sea P_n la proposición: si a y b son dos enteros positivos cualesquiera, tales máx $(a, b) = n$ se tiene $a = b$.

a) P_1 es evidentemente cierta, ya que si máx $(a, b) = 1$, se tiene, ya que $a, b \in \mathbb{N}$, $a = b = 1$.

b) Supongamos que P_r es cierta. Sean, $a, b \in \mathbb{N}$ cualesquiera. máx $(a, b) = r + 1$. Definimos los dos enteros $A = a - 1$ y $B = b - 1$; se tendrá: máx $(A, B) = r$. De aquí $A = B$, ya que P_r se ha supuesto cierta y por tanto P_{r+1} es cierta. Por tanto en virtud de la inducción matemática, P_n es cierta para todo n.

De otra parte, si $a, b \in \mathbb{N}$ cualesquiera, designemos $m(a, b) = r$.

Puesto que hemos probado que P_n es cierta para todo n, se tendrá en particular que P_r es cierta. Por tanto $a = b$.

Veamos ahora un ejemplo en el que se supone demostrado el teorema a) de la inducción.

«Todo número natural, es igual al número natural siguiente.»

Es claro que si suponemos que $k = k + 1$, podemos probar que $k + 1 = k + 2$ y así la proposición es válida para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$ y el teorema está probado. Como consecuencia, tenemos el falso corolario, de que todos los «números naturales son iguales». Analicemos dónde está el error: es claro que el teorema a) del procedimiento de inducción no ha sido demostrado (es más, ni siquiera se puede probar) y sólo ha sido probado b), ya que sabemos de la lógica que de un enunciado falso se puede implicar un resultado verdadero.

Por todo ello, los teoremas a) y b) del método de inducción matemática son independientes; el teorema a) crea, en sentido figurado, la base de la inducción, mientras que el teorema b), permite ampliar automáticamente e indefinidamente esta base, pasando de un caso particular al siguiente, o sea, de n a $n + 1$.

Por todo lo anterior, podemos dar una nueva formulación del principio de inducción matemática, así:

«Si una sucesión de proposiciones, $P_s, P_{s+1}, P_{s+2}, \ldots$, donde s es un entero positivo tal que:

a) se sabe que P_s es verdadera y b) para todo $r \geqslant s$, de la verdad de P_r se sigue la verdad de P_{r+1}, entonces todas las proposiciones son verdaderas; es decir, P_n es cierta para todo $n \geqslant s$. Para establecer esta proposición, se hace de forma análoga a como probamos el principio de inducción finita ordinario, con la única variante de sustituir la sucesión, $1, 2, 3, \ldots$, por la sucesión, $s, s + 1, s + 2, \ldots$.

Como un buen ejercicio de aplicación de lo anterior, tenemos la desigualdad de Bernoulli; «para todo $p \neq 0$ y $p > -1$ y para todo entero $n \geqslant 2$ $(1 + p)^n > 1 + n\,p$»; esta desigualdad es útil en diferentes teoremas sobre convergencia de sucesiones.

En algunos enunciados complicados, en los que se utiliza la inducción, ésta debe ser precisada en los siguientes términos:

A veces b) se basa en que la proposición es verdadera no sólo para $n = k$, sino también para $n = k - 1$. En estos casos a) de la inducción se debe comprobar para dos valores sucesivos de n. Ejemplo: si $u_0 = 2$ y $u_1 = 3$ y si

$$u_{k+1} = 3\,u_k - 2\,u_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

entonces se puede probar fácilmente que:

$$u_n = 2^n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para verificar a) ha de hacerse para $n = 0$ y $n = 1$. Para b) se procede así:

$$u_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \quad \text{y} \quad u_k = 2^k + 1,$$

entonces,

$$u_{k+1} = 3\,u_k - 2\,u_{k-1} = 3\,(2^k + 1) - 2\,(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$$

Otras veces la parte b) de la inducción se demuestra para un valor de n, supuesta su validez para todos los números naturales k, $k \leqslant n$.

También la proposición por inducción se demuestra para todo número entero n mayor que un entero m (por ejemplo, cualquier proposición relacionada con los polígonos de n lados, tiene sentido para $n \geqslant 3$). En este caso a) de la inducción, consiste en demostrar la proposición para $n = m + 1$ y si es necesario, para algunos otros valores de n.

Supongamos que deseamos calcular la suma

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \;..\; + \frac{1}{n\,(n+1)} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Podemos ver, con cautela, que

$$S_1 = \frac{1}{2}, \; S_2 = \frac{2}{3}, \; S_3 = \frac{3}{4}, \ldots$$

y formular a continuación la hipótesis de que

$$S_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

comprobándola después mediante el método de inducción matemática. Así, la hipótesis enunciada sobre s_n, es efectivamente correcta. Si la hipótesis no hubiera sido correcta, su falsedad quedaría en evidencia al intentar demostrar la parte b) del método de inducción. Por tanto, el método de inducción matemática permite determinar la ley general, ensayando las hipótesis que surgen, rechazando las falsas y llegando a las correctas.

Para finalizar, existen proposiciones matemáticas que han sido comprobadas en numerosos casos particulares considerados, pero hasta la fecha no han sido demostradas en general (por ejemplo, la conjetura de Godbach: «todo número par $\neq 2$, puede ser representado, como suma de dos números primos»); un buen ensayo sobre este problema, lo encontramos en (1), un gran libro, para iniciarse en la investigación y el «razonamiento plausible», en cualquier parte de la ciencia.

La falsedad de un teorema matemático queda puesta en evidencia con un contraejemplo, mientras que su veracidad debe hacerse independientemente de los casos particulares y la confirmación de la veracidad de un caso particular no demuestra la verdad del teorema.

La inducción matemática permite, en diferentes partes de la matemática, ser utilizada entre otras cosas para el cálculo, demostración, construcción, definición, etc. Ver para esto en [10].

4 El problema de la inducción en la ciencia

Una tesis de gran aceptación y a la que se opone K. Popper, ver [16], es que las ciencias empíricas, se caracterizan por el hecho de que emplean los métodos inductivos: según esta tesis, la lógica de la investigación científica es idéntica a la lógica inductiva, es decir, al análisis lógico de tales métodos inductivos.

Es frecuente en la vida ordinaria llamar «inductiva» a una inferencia cuando pasa de enunciados «singulares y particulares», tales como descripciones de los resultados o experimentos a enunciados «universales» tales como hipótesis, conjeturas y teorías.

Es claro que desde el punto de vista de la lógica no es obvio que esté justificado el inferir enunciados universales partiendo de enunciados particulares (éste es el punto de vista del matemático y el que hemos defendido en este trabajo); ya que cualquier conclusión que deduzcamos, cabe la posibilidad de resultar falsa e incompleta algún día (como ha ocurrido en diferentes teorías en la ciencia e incluso en algunos ejemplos puramente matemáticos como hemos visto).

Por tanto, llamamos «problema de la inducción» a la cuestión acerca de que si están justificadas las inferencias inductivas o en qué condiciones lo están. Por ello, el problema de la inducción puede formularse: «como la cuestión de cómo establecer la verdad de los enunciados universales basados en la experiencia como son las hipótesis y los sistemas teóricos de las ciencias empíricas, ver (24) y (25). Es frecuente encontrar, en libros científicos elementales y superiores, la siguiente frase que dice: «la verdad de un determinado enunciado o ley de la naturaleza», se sabe por la experiencia, obtenida esta inferencia lógica por los múltiples experimentos realizados al respecto, para la confirmación de dicha ley. Así pues, la pregunta acerca de si existen leyes naturales, cuya verdad no conste, viene a ser otra forma de preguntar si las inferencias inductivas están o no justificadas de forma lógica.

Por todo esto, según Reichenbach, al establecer un «principio de inducción» para el método científico, determina la verdad de las teorías científicas; eliminarlo de la ciencia significaría nada menos que privar a ésta de la posibilidad de decidir sobre la verdad o falsedad de sus teorías; es evidente que sin él, la ciencia perdería el derecho de distinguir sus teorías de las creaciones fantásticas y arbitrarias de la imaginación del poeta».

Así un «principio de inducción» no puede ser una verdad puramente lógica, como una tautología o enunciado analítico. Dicho principio de inducción, tiene que ser un enunciado sintético; esto es, uno cuya negación no sea contradictoria, sino lógicamente posible. De esto nos planteamos de por qué habría que aceptar semejante principio, y de cómo podemos justificar racionalmente su aceptación.

Muchos estamos habituados a creer en la lógica inductiva, y como señala Reichenbach, que «la totalidad de la ciencia, acepta sin reservas el principio de inducción, y que nadie puede tampoco dudar de este principio en la vida corriente». Sin embargo, K. Popper en (16), afirma que incluso así, «la totalidad de la ciencia» podría estar en un error y por ello es superfluo todo principio de inducción.

Con Hume aparecen las primeras incoherencias, cuando se admite el prin cipio de inducción, ya que tal principio de inducción es a su vez un enunciado universal. Más aún, K. Popper afirma de que las inferencias inductivas, aún no siendo estrictamente válidas, pueden alcanzar cierto grado de seguridad o de probabilidad; como dice Reichenbach «el principio de inducción como el medio por el que la ciencia decide sobre la verdad». Para ser más exactos, deberíamos decir «que sirve para decidir sobre la probabilidad: ya que los enunciados científicos pueden alcanzar únicamente grados continuos de probabilidad, cuyos límites superior e inferior respectivamente inalcanzables, son la verdad y la falsedad».

Por ello siguiendo a K. Popper, «no se gana nada si el mismo principio de inducción no se toma como verdadero, sino meramente probable». En resumen: la lógica de la inferencia probable o «lógica de la probabilidad» como todas las demás formas de la lógica inductiva, conduce, bien a una regresión infinita, o bien a la doctrina del apriorismo, ver (1) y (16).

BIBLIOGRAFIA

(1) G. POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.
(2) M. SPIVAK: *Calculus, I y II*, Ed. Reverte, Barcelona.
(3) T. APOSTOL: *Calculus, I y II*, Reverte, Barcelona.
(4) REY PASTOR: *Análisis matemático, I*, Kapeluz, Buenos Aires.
(5) COURANT-ROBBINS: *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, Madrid.
(6) HALMOS: *Nueva teoría de conjuntos*, Cecsa, Barcelona.
(7) KELLEY: *Topología general*, Eudeba, Buenos Aires.
(8) EVES: *Estudio de las geometrías, I y II*, Uteha, México.
(9) SOMINSKI: *Método de la inducción matemática*, Mir, Moscú.
(10) GOLOVINA y YANGLOM: *La inducción y geometría*, Mir, Moscú.
(11) QUEYSANE: *Geometría*, Cecsa, Barcelona.
(12) BOUDOT: *Lógica inductiva y probabilidad*, Paraninfo, Madrid.
(13) LANG: *Algebra*, Aguilar, Madrid.
(14) NIJENJUIS: *Combinatorial algorithms*, Academic Press, Londres.
(15) COMTET: *Analyse combinatoire*, PUF, I y II, París.
(16) POPPER: *La lógica de la investigación científica*, Tecnos, Madrid.
(17) LOEVE: *Teoría de la probabilidad*, Tecnos, Madrid.
(18) BIRKHOFF-MAC LAINE: *Algebra moderna*, Vicens Vives, Barcelona.
(19) GODEMENT: *Algebra*, Tecnos, Madrid.
(20) REY PASTOR: *Elementos de análisis algegraico*, Madrid.

(21) PIAGETT y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza, Madrid.

(22) KEMENY y otros: *Estructuras matemáticas finitas*, Cecsa, Barcelona.

(23) S. THIO DE POL: *Primos o algunos dislates sobre números*, Alhambra, Madrid.

(24) I. LAKATOS: *Pruebas y refutaciones*, Alianza, Madrid.

(25) T. S. KUHN: *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica*, Alianza, Madrid.