TRASFORMADA DE LAPLACE DE UNA POLIGONAL DADA POR SU ECUACION CON FORMAS ABSOLUTAS

por

VICENTE FRAILE OVEJERO e IGNACIO SALINAS DE LA PUENTE

1. La obtención de la trasformada de Laplace de una poligonal rectilínea unívoca, ya de por sí trivial subdividiendo el intervalo de integración $(0, \infty)$ por medio de las abscisas positivas de los vértices que las posean, se hace aún más breve derivando dos veces la gráfica: la primera derivada es una escalonada, y derivando nuevamente, pero *en el sentido de las distribuciones* de Schwartz, aparecen las deltas de Dirac. Una delta es una distribución, pero no una función, aunque así le llaman algunos libros. La trasformada de $\delta(x)$ es la unidad. De manera que partiendo de aquí y utilizando las propiedades de traslación y de la trasformada de la integral se obtiene rápidamente la trasformada de la poligonal dibujada. Así se procede en la teoría de las redes que se estudia en Ingeniería de Telecomunicación.

Ahora bien, toda poligonal rectilínea unívoca puede ser expresada por una ecuación de la forma

$$y = \sum_{1}^{n} k_i \mid x - \alpha_i \mid + r x + s \qquad [1]$$

donde k_i, r, s son coeficientes reales, y α_i las abscisas de todos los vértices. La gráfica de una función como ésta es una poligonal de n vértices situados en las rectas $x - \alpha_i = 0$. Consta, pues, de $n + 1$ lados; de ellos, los dos extremos son semirrectas, y los restantes son segmentos encajados en las franjas limitadas por cada dos rectas

$$x - \alpha_m = 0, \quad x - \alpha_{m+1} = 0$$

consecutivas.

Dada una ecuación como la [1] es muy fácil dibujar la poligonal. Recíprocamente, dibujada una poligonal unívoca rectilínea es también muy sencillo obtener una ecuación de ella del tipo [1].

Todo esto constituye una parte menuda y trivial de la geometría analítica de las poligonales de cualquier tipo, de los recintos planos y de los segmentos y puntos aislados (bibliografía, 1 y 2).

2. Aprovechemos la circunstancia de que una poligonal cualquiera puede ser expresada por una sola ecuación (y por otras equivalentes; pero elegimos la partición más sencilla del plano). Vamos a tratar a las poligonales como tratamos a las curvas clásicas: como un todo, como una unidad de carácter funcional. Y vamos a aprovechar también la circunstancia de que las formas «valoradas» $|f(x)|$ (así las llamó el eminente profesor Barinaga) pueden ser sometidas sin dificultad al cálculo diferencial e integral (bibliografía, 3).

Queremos advertir que los fundamentos de la geometría analítica de las poligonales, así como el tratamiento diferencial de las formas valoradas, son anteriores a la organización de la teoría de las distribuciones hecha por Laurent Schwartz, y permiten llegar a muchos de los resultados de esta última sin salir del campo estrictamente funcional, como ocurre, por ejemplo, en los desarrollos en serie de Fourier de escalonadas y poligonales periódicas, en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales con coeficientes valorados, en la obtención de trasformadas de Fourier y Laplace con formas absolutas, etc.

3. Recordemos que

$$\int |f(x)|\, d x = \frac{|f(x)|}{f(x)} \int f(x)\, d x;$$

pero si la integral es definida $\int_a^b$, el factor $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ puede valer 1 ó -1 en los subintervalos producidos por los ceros de $f(x)$ en $[a, b]$. Por eso, si son

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

los ceros de $f(x)$ entre los límites de la integral, haremos

$$\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_n}^b .$$

Entonces, el factor $\dfrac{|f|}{f}$ que ha de multiplicar a cada integral del segundo miembro, o vale 1 o vale -1 entre los límites de cada una de las integrales.

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a hallar la trasformada de Laplace de las funciones

$$|x-\alpha| \quad \text{y} \quad |x+\alpha|, \quad \alpha > 0.$$

La primera tiene el único cero de abscisa positiva $x = \alpha$. Para $x < \alpha$, la función $\dfrac{|x-\alpha|}{x-\alpha}$ vale -1; y vale $1 \forall x > \alpha$. Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\,|x-\alpha| = \int_0^\infty e^{-px}\,|x-\alpha|\,d\alpha = -\int_0^\alpha e^{-px}(x-\alpha)\,dx + \int_\alpha^\infty e^{-px}(x-\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{p^2}(2e^{-\alpha p}-1) + \frac{\alpha}{p}, \quad \text{con} \quad p > 0.$$

La función

$$|x+\alpha|, \ \alpha \geq 0$$

no tiene ceros en $(0, \infty)$ y es

$$\frac{|x+\alpha|}{x+\alpha} = 1;$$

luego

$$\mathcal{L}\,|x+\alpha| = \int_0^\infty e^{-px}(x+\alpha)\,dx = \frac{1}{p^2} + \frac{\alpha}{p},$$

para $p > 0$.

Conociendo estas dos trasformadas, que deben ser incluidas en las tablas, se puede hallar inmediatamente la trasformada de una poligonal rectilínea unívoca dada por su ecuación de la forma [1].

Veamos el ejemplo siguiente: poligonal dada por la ecuación

$$y = -\frac{2}{3}\,|x+2| + \frac{1}{3}\,|x-2| + \frac{2}{3}x + 1 \qquad [2]$$

Tiene dos vértices, situados en $x+2=0$ y en $x-2=0$, cuyas ordenadas se hallan inmediatamente, quedando determinado el lado central. Las semirrectas extremas se obtienen fijando un $x < -2$ y otro $x > 2$. Resulta la poligonal de la figura 1.

Naturalmente, no es necesario representar la ecuación [2] gráficamente para operar con ella.

Aplicando las fórmulas de

$$\mathcal{L}\,|x+\alpha|, \ \mathcal{L}\,|x-\alpha|$$

a los valores absolutos que aparecen en [2] resulta:

$$\mathcal{L}\,|x+2| = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}; \quad \mathcal{L}\,|x-2| = \frac{1}{p^2}(2e^{-2p}-1) + \frac{2}{p}.$$

Por lo tanto, después de simplificar, es:

$$\mathcal{L} y = \frac{1}{3p}\left(\frac{2}{p\,e^{2p}} - \frac{1}{p} + 1\right),$$

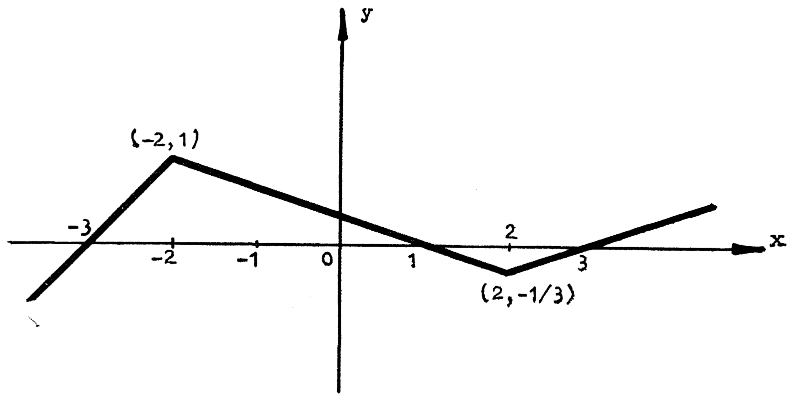

Fig. 1.

que coincide con la obtenida empleando las distribuciones.

Si nos hubieran dado solamente la gráfica, habríamos planteado su ecuación con coeficientes indeterminados de la siguiente manera:

$$y = a\,|\,x + 2\,| + b\,|\,x - 2\,| + c\,x + d. \qquad [3]$$

Hallaríamos después a, b, c, d sustituyendo en [3] los dos vértices y los puntos $(-3, 0)$, $(3, 0)$, por ejemplo, con lo cual llegaríamos a un sencillo sistema lineal en dichos coeficientes.

4. Si derivamos la función dada por la ecuación [2], teniendo en cuenta que la derivada de $|\,f(x)\,|$ es

$$\frac{|\,f(x)\,|}{f(x)}\,f'(x)$$

(bibliografía, 3), queda:

$$y' = -\frac{2}{3}\,\frac{|\,x+2\,|}{x+2} + \frac{1}{3}\,\frac{|\,x-2\,|}{x-2} + \frac{2}{3}, \qquad [4]$$

que es la ecuación de la escalonada de la figura 2 (no es necesario dibujarla).

Para hallar la trasformada de Laplace de esta escalonada, como de cualquier otra, veamos primero cuál es la transformada de $\dfrac{|\,x-\alpha\,|}{x-\alpha}$ y de $\dfrac{|\,x+\alpha\,|}{x+\alpha}$ con $\alpha > 0$.

Recordando lo dicho en el párrafo 3 se obtiene:

$$\mathcal{L}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha} = \frac{2}{pe^{\alpha p}} - \frac{1}{p}; \quad \mathcal{L}\frac{|x+\alpha|}{x+\alpha} = \frac{1}{p}, \quad \text{con} \quad p>0.$$

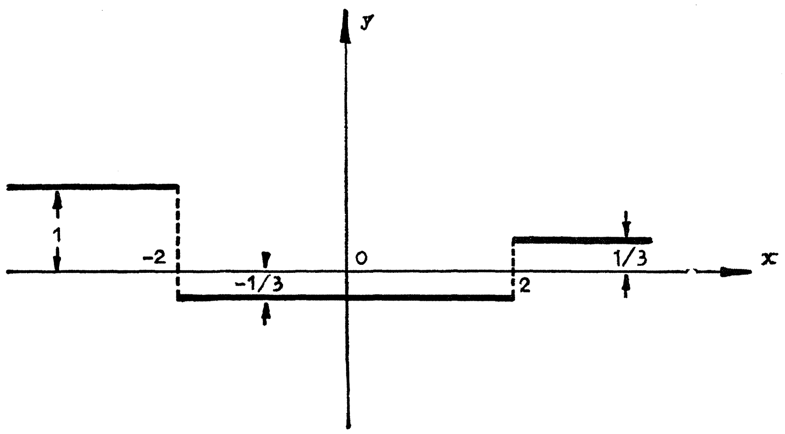

Fig. 2.

Aplicando estas fórmulas (que también deberían figurar en las tablas) se halla rápidamente la trasformada de la escalonada [4], que es:

$$\mathcal{L}[4] = \frac{1}{3p}(2e^{-2p} - 1),$$

y coincide también con la obtenida empleando las distribuciones.

Nota.—Dentro del marco de la teoría de funciones, la derivada de una escalonada es nula, incluso en los puntos de salto (remitimos al lector al trabajo citado en la bibliografía, 3); pero esta derivación no se hace en el sentido de las distribuciones, y por eso no aparece la delta de Dirac. En el campo funcional, la trasformada de Laplace de la derivada de una escalonada será, pues, idénticamente nula. Por ejemplo, la trasformada de $D\left(\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}\right)$ es cero, por ser cero tal derivada. Pero si derivamos en el sentido de las distribuciones, la trasformada de $D\left(\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}\right)$ es: $2e^{-\alpha p}$, puesto que dicha derivada es $2\,\delta(x-\alpha)$.

BIBLIOGRAFIA

(1) TACCHELLA, G.: *Fondamenti di Geometria analitica a due ed a tre dimensioni dei luoghi lineari composti* («Giornale di Matematiche», 3.ª serie, 24, 1933, Milán).

(2) FRAILE, A.: *Ampliación de la Geometría analítica ordinaria* («Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, t. II, 1942, Madrid).

(3) FRAILE, A.: *Derivación e integración de funciones de variable real tomadas en valor absoluto* («Revista de la Unión Matemática Argentina», vol. X, núm. 3, 1945, Buenos Aires).

Un avance de este trabajo fue publicado en 1942 en la revista «Euclides», Madrid.