TRIANGULOS ARITMETICOS (2.ª parte)

por

MANUEL DÍAZ REGUEIRO

En el primer artículo se describe la construcción del triángulo aritmético

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 2 & & \\
 & 1 & & 6 & & 11 & & 6 & \\
1 & & 10 & & 35 & & 50 & & 24 \\
\end{array}
$$

....

cuya fila n nos da los números de Stirling de primera clase, en valor absoluto.

La notación de [1] de esos números de Stirling es $S_n^{(m)}$. Aparecen en fórmulas tales como

$$\{\ln (1 + x)\}^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{d^m}{d x^m} f(x) = m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{\Delta^n f(x)}{n!} .$$

Además, $(-1)^{n-m} S_n^{(m)}$ es el número de permutaciones de n símbolos que tengan exactamente m ciclos.

Pero ahora trataremos de un triángulo aritmético que nos dé los números de Stirling de segunda clase $\mathcal{S}_n^{(m)}$, es decir, el número de maneras de partir un conjunto de n elementos en m subconjuntos no vacíos.

Estos números aparecen en fórmulas tales como

$$x^n = \sum_{m=1}^{n} \mathcal{S}_n^{(m)} x^{(m}$$

$$(e^x - 1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{S}_n^{(m)} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{-x)(1 - 2x)\dots(1 - mx)} = \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{S}_n^{(m)} x^{n-m} \quad \text{si} \quad |x| < 1/m$$

$$\mathcal{S}_n^{(m)} = \frac{1}{m\,!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n$$

$$\Delta^m f(x) = m! \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{S}_n^{(m)} \frac{f^{n}(x)}{n\,!}$$

y en otras recogidas en [1], págs. 824-825.

El triángulo se construye:

1) Los dos lados del triángulo están formados por unos.

2) La segunda línea diagonal (paralela al lado derecho) se construye escribiendo debajo de los números x, y, el número $x \cdot 2 + y$.

3) La tercera línea se construye escribiendo debajo de los números x, y, el número $x \cdot 3 + y$.

4) La cuarta línea, escribiendo debajo de x, y, el número $x \cdot 4 + y$. Etc.

El resultado es:

						1		1						
					1		3		1					
				1		6		7		1				
			1		10		25		15		1			
		1		15		65		90		31		1		
	1		21		140		350		301		63		1	
1		28		266		1050		1701		969		127		1

....

en el que cada fila n nos da, por ejemplo, los coeficientes de x^n en función de los factoriales generalizados $x^{(i}$. En cada fila n los números que aparecen son los $\mathcal{S}_n^{(m)}$.

En general

Construimos el siguiente triángulo aritmético cuyo lado izquierdo sean unos y el derecho potencias de x_1. En la segunda diagonal colocamos debajo de las expresiones x, y, la expresión $x \cdot x_2 + y$. En la tercera diagonal colocamos debajo de x, y, la $x \cdot x_3 + y$. En la cuarta, debajo de x, y, la $x \cdot x_4 + y$. Etc. El resultado es:

1	x_1			
1	$x_1 + x_2$	x^2_1		
1	$x_1 + x_2 + x_3$	$x^2_2 + x_1 x_2 + x^2_1$	x^3_1	
1	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	$x^2_3 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2 + x^2_1 + x^2_2$,	$x^3_2 + x^2_2 x_1 + x^2_1 x_2 + x^3_1$,	x^4_1

....

Se demuestra por inducción sin dificultad que los elementos de la diagonal n son las funciones simétricas de $x_1, \ldots, x_n$ conocidas por funciones alef. El elemento de la diagonal n que ocupa el lugar $r + 1$ es la función simétrica homogénea del producto de orden r de $x_1, \ldots, x_n$. En notación de [2], h_r.

Por lo tanto, para desarrollar en serie de potencias:

$$\frac{a_0}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n} =$$

$$= \frac{a_0}{a_0 (1 - x_1 x)(1 - x_2 x) \dots (1 - x_n x)} = \sum_{r=0}^{\infty} h_r x^r.$$

Luego los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la función anterior son los elementos de la diagonal n.

Sin más que hacer un cambio alternativo de signos en la diagonal se obtiene el desarrollo en serie de:

$$\frac{a_0}{a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + (-1)^n x^n.}$$

El triángulo de Pascal es, de nuevo, un ejemplo de estos triángulos para $x_i = 1$ y nos dan, sus diagonales, los coeficientes del desarrollo en serie de $(1 - x)^{-n}$.

Ejemplos.—Desarrollo en serie de

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{1/6}{(1 - x)(1 - x/2)(1 + x/3)}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 1 & & & & & \\
1 & & 3/2 & & 1 & & & & \\
 & 7/6 & & 7/4 & & 1 & & & \\
 & & 49/36 & & 15/8 & & 1 & & \\
 & & & 307/216 & & 31/16 & & 1 & \\
 & & & & 1897/1296 & & 63/32 & & 1
\end{array}$$

es

$$1/6\,(1 + 7/6\,x + 49/36\,x^2 + 307/216\,x^3 + 1897/1296\,x^4 + \dots).$$

Desarrollo en serie de

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - 2x)(1 + 3x)} = 1 + 7x^2 - 6x^3 + 49x^4 - 84x^5 + \dots$$

Pues,

		1		1						
	1		3		1					
1		0		7		1				
			7		15		1			
				—6		31		1		
					49		63		1	
						—84		127		1

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAMOWITZ y STEGUN: *Handbook of Mathematical functions.* Dover, 1970.
[2] TURNBULL, H. W.: *Teoría de ecuaciones.* Editorial Dossat.