TRIANGULOS ARITMETICOS (2.ª parte)

por

Manuel Díaz Regueiro

En el primer artículo se describe la construcción del triángulo aritmético

cuya fila n nos da los números de Stirling de primera clase, en valor absoluto. La notación de [1] de esos números de Stirling es $S_n^{(m)}$. Aparecen en fórmulas tales como

$$\{\ln (1+x)\}^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{d^m}{d x^m} f(x) = m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{\Delta^n f(x)}{n!} .$$

Además, $(-1)^{n-m} S_n^{(m)}$ es el número de permutaciones de n símbolos que tengan exactamente m ciclos.

Pero ahora trataremos de un triángulo aritmético que nos dé los números de Stirling de segunda clase $\mathcal{S}_n^{(m)}$, es decir, el número de maneras de partir un conjunto de n elementos en m subconjuntos no vacíos.

Estos números aparecen en fórmulas tales como

$$x^{n} = \sum_{m=1}^{n} \mathcal{S}_{n}^{(m)} x^{(m)}$$

$$(e^{x} - 1)^{m} = m! \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{S}_{n}^{(m)} \frac{x^{n}}{n!}$$

$$\frac{1}{-x(1-2x)\dots(1-mx)} = \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{S}_{n}^{(m)} x^{n-m} \text{ si } |x| < 1/m$$

$$\mathcal{S}_{n}(m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^{n}$$

$$\Delta^{m} f(x) = m! \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{S}_{n}(m) \frac{f^{n}(x)}{n!}$$

y en otras recogidas en [1], págs. 824-825.

- El triángulo se construye:
- 1) Los dos lados del triángulo están formados por unos.
- 2) La segunda línea diagonal (paralela al lado derecho) se construye escribiendo debajo de los números x, y, el número $x \cdot 2 + y$.
- 3) La tercera línea se construye escribiendo debajo de los números x,y, eB número $x\cdot 3+y.$
- 4) La cuarta línea, escribiendo debajo de x, y, el número $x \cdot 4 + y$. Etc. El resultado es:

en el que cada fila n nos da, por ejemplo, los coeficientes de x^n en funcióne de los factoriales generalizados $x^{(i)}$. En cada fila n los números que aparecenson los $\mathcal{S}_{w}^{(n)}$.

En general

Construimos el siguiente triángulo aritmético cuyo lado izquierdo sean unos y el derecho potencias de x_1 . En la segunda diagonal colocamos debajo de las expresiones x,y, la expresión $x\cdot x_2+y$. En la tercera diagonal colocamos debajo de x,y, la $x\cdot x_3+y$. En la cuarta, debajo de x,y, la $x\cdot x_4+y$. Etc. El resultado es:

Se demuestra por inducción sin dificultad que los elementos de la diagonal n^2 son las funciones simétricas de $x_1, ..., x_n$ conocidas por funciones alef. Elemento de la diagonal n que ocupa el lugar r+1 es la función simétrical homogénea del producto de orden r de $x_1, ..., x_n$. En notación de [2], h_r .

Por lo tanto, para desarrollar en serie de potencias:

$$\begin{split} &\frac{a_0}{a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\ldots+a_n\,x^n} = \\ &= \frac{a_0}{a_0\,(1-x_1\,x)\,(1-x_2\,x)\ldots(1-x_n\,x)} = \sum_{r=0}^\infty\,h_r\,x^r. \end{split}$$

Luego los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la función ant φ rior son los elementos de la diagonal n.

Sin más que hacer un cambio alternativo de signos en la diagonal se obtiene el desarrollo en serie de:

$$\cfrac{a_0}{a_0-a_1\,x\,+\,a_2\,x^2-\ldots\,+\,(-\,1)^n\,x^n.}$$

El triángulo de Pascal es, de nuevo, un ejemplo de estos triángulos para $x_i=1$ y nos dan, sus diagonales, los coeficientes del desarrollo en serie de $(1-x)^{-n}$.

Ejemplos.—Desarrollo en serie de

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{1/6}{(1 - x)(1 - x/2)(1 + x/3)}$$

$$\frac{1}{1} \frac{3/2}{3/6} \frac{1}{7/4} \frac{1}{49/36}$$

$$\frac{49/36}{307/216} \frac{15/8}{31/16} \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1897/1296} \frac{63/32}{63/32} \frac{1}{1}$$

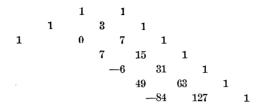
es

$$1/6 (1 + 7/6 x + 49/36 x^2 + 307/216 x^3 + 1897/1296 x^4 + ...)$$

Desarrollo en serie de

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1+3x)} = 1+7x^2-6x^3+49x^4-84x^5+\dots$$

Pues,



BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAMOWITZ y STEGUN: Handbook of Mathematical functions. Dover, 1970. [2] TURNBULL, H. W.: Teoría de ecuaciones. Editorial Dossat.