SOBRE UN PROBLEMA DE LEONARDO PISANO

por

J. Babini

En la *Epístola* que dirige al Maestro Teodoro, Leonardo resuelve el problema que consiste en inscribir en un triángulo isósceles un pentágono equilátero que tenga un lado sobre la base del triángulo y otros dos lados sobre los lados restantes del triángulo. Este problema, de por sí algo sofisticado, que Leonardo resuelve algebraicamente, posee cierto interés histórico. Por un lado, fue uno de los primeros problemas geométricos resueltos algebraicamente en Occidente, mientras que, por otra parte, por tratarse de un problema no construido partiendo de un resultado previsto, éste se obtuvo en forma de expresión cuadrática que Leonardo calculó aproximadamente, dando la parte fraccionaria mediante fracciones sexagesimales hasta la cuarta exacta.

Es posible que Leonardo haya pensado en resolver el problema geométricamente, pero llevado por el interés del momento que ponía el acento en los nuevos métodos introducidos por los árabes, prefirió tratar el problema algebraicamente con buen resultado. Partiendo de un triángulo sencillo, doble del triángulo rectángulo de lados proporcionales a 3, 4, 5, y admitiendo el problema resuelto llega, mediante proporciones y el teorema de Pitágoras, a una ecuación de segundo grado de raíces reales de signo contrario, a la que aplica el método de los árabes, obteniendo así la raíz positiva, solución del problema.

Desde un punto de vista geométrico-cinemático el problema consiste: 1.º, construir una pentagonal equilátera cerrada de lado de valor arbitrario X, conociendo las direcciones de tres de sus lados; 2.º, mediante una semejanza determinar x tal que $x : X = h : H$, siendo h y H dos segmentos correspondientes en el pentágono buscado y el pentágono construido.

Partiendo de un triángulo A B C de base A B y altura h, el sistema que resuelve el problema es:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos A + \cos B - 1 = M,$$
$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = N,$$
$$h = x\,(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen}\alpha) = x\,(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen}\beta),$$

siendo α y β las direcciones incógnitas del pentágono y x su lado.

Una primera consecuencia es que la línea de cierre de la poligonal formada por lados paralelos a los lados del triángulo e iguales al radio R de la circunferencia circunscrita, es igual y normal a $\overline{O\,O'}$, siendo estos puntos los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita; y que

$$M^2 + N^2 = d^2 = \overline{O\,O'}^2\,; \qquad R^2 < 1\,;$$

de ahí que la pareja de direcciones incógnitas se obtendrá construyendo a ambos lados de $\overline{O\,O'}$ triángulos isósceles de lados R. Con esta solución se constituyen los dos pentágonos semejantes a los buscados y finalmente éstos, que pueden resultar convexos, cóncavos, estrellados o impropios.

Por su parte, desde el punto de vista algebraico, la eliminación de α y β lleva a una ecuación cuadrática de raíces reales, cuyo coeficiente en x^2 se anula para 2 cos A o 2 cos B o 2 (cos A + cos B) igual a 1.

Algunos casos particulares mostrarán las singularidades del problema.

a) Triángulo equilátero. $M = N = d = 0$; $\beta - \alpha = \pi$. Infinidad de soluciones con x acotado y direcciones incógnitas paralelas. Si Leonardo hubiera considerado este caso, partiendo de antemano (como en su ejemplo concreto) de una solución simétrica hubiera encontrado el caso del único pentágono convexo simétrico $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Triángulo isósceles no equilátero. $N = 0$; $\alpha + \beta = 0$. Dos pentágonos: uno convexo y el otro cóncavo o impropio; simétricos respecto de la altura h. En el ejemplo de Leonardo $\cos \alpha = \frac{1}{10}$.

c) $\overline{O\,O'}\,\overline{A\,B}$; $M = 0$; $\alpha + \beta = \pi$. Ecuación con raíz doble $x = 2\,a\,b : (a + b)$, pero dos pentágonos distintos de direcciones simétricas de A B.

d) En los tres casos en los que se anula el coeficiente de x^2, el problema tiene una solución impropia y otra propia con $x = a\,b : (a + b)$. Si además el triángulo es isósceles 4 cos A = 4 cos B = 1 (base la mitad del lado igual) la única solución es el mismo triángulo; tomando los puntos medios A′ y B′ de los lados mayores, el pentágono C A′ A B B′ C es el buscado.

e) Otro caso particular interesante es $C = \frac{\pi}{3}$, sin ser equilátero el triángulo. En ese caso, si por A y B se trazan paralelas A A′ y B B′ tales que los triángulos A A′ C y B B′ C sean equiláteros y en la prolongación de A B se toman A A″ = A C y B B″ = B C, los pentágonos C A A″ A A′ C y C B′ B B″ B C son los pentágonos buscados.

El clásico triángulo griego, mitad del equilátero, ofrecería un ejemplo de *d* y de *e*, pero Leonardo no pudo tomarlos en consideración en vista de que sus lados (proporcionales a 1, 2 y $\sqrt{3}$) no son racionales.

Buenos Aires, 1980.