LA INDUCCION EN EL BACHILLERATO

por

J. B. ROMERO MÁRQUEZ

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La inducción en el Bachillerato se maneja poco, sobre todo por las dificultades que implica su uso y comprensión correcta por los alumnos. Sin embargo, creo que las dificultades metodológicas y didácticas de la inducción matemática no son superiores a la metodología y didáctica de los conceptos del análisis, que se ven en el bachillerato, como el límite de una función en un punto, la continuidad, derivabilidad, etc.

Es claro que la inducción finita permite establecer enunciados y proposiciones sobre conjuntos finitos e infinitos numerables (he aquí la gran dificultad; el manejo una vez más de conjuntos infinitos).

Pero queremos observar que en el análisis el concepto de límite y continuidad se basa en el concepto de entorno de un punto, que a la postre viene descrito, en su forma métrica, por una inecuación, que ha de tener infinitas soluciones. Estas infinitas soluciones forman un conjunto de potencia o cardinal superior al numerable. Por todo ello, creemos que la inducción matemática es, en principio, más simple que los conceptos habituales de límite, continuidad, etc., que se utilizan en el análisis.

La inducción matemática se emplea en primero de BUP, para establecer la fórmula del binomio de Newton, algunos resultados en los que intervienen los números combinatorios, como también en otras cuestiones, sobre estadística y cálculo de probabilidades. También se utiliza la inducción en las progresiones aritméticas y geométricas y en el cálculo financiero.

Cuando en segundo de BUP se introduce el concepto de sucesión de números reales, uno de los usos más frecuentes de la inducción finita es para probar que una sucesión creciente (respectivamente decreciente) y acotada tiene límite. Por ejemplo la sucesión en $\mathbb{R}$ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge al número e.

Otros usos de la inducción en segundo de BUP son para probar cuestiones sobre las funciones logarítmicas, exponenciales, tales como:

$$\log(x_1 \ldots x_n) = \log x_1 + \ldots + \log x_n,$$

donde log significa logaritmo.

En el cálculo diferencial se emplea, para hallar la derivada de $(\Sigma u_i)' = \Sigma u'_i$, la derivada de la suma y producto de un número finito de funciones, derivables, etc.

En 3.º de BUP empleamos la inducción para establecer entre otros los siguientes resultados:

a) La fórmula de Moivre para números complejos.

b) La derivada n-sima de una función.

c) En el estudio local de una función en un punto.

d) En la teoría de la integral, cálculo de áreas y volúmenes.

e) En algunas cuesiones que se plantean en estadística y cálculo de probabilidades.

En COU se supone que la inducción matemática, así como la continuidad, límite, etc., son «entendidas» por los alumnos después del aprendizaje que se hace durante los tres primeros cursos del BUP. Por ello la inducción se emplea en la demostración de diferentes proposiciones y teoremas que intervienen en Algebra, Geometría, Análisis, etc. Sin embargo, la experiencia docente nos dice que en la mayoría de los casos, los alumnos no logran entender el concepto e incluso la técnica operatoria del método de la inducción matemática. Por ello, creemos que la formación matemática, tal como hoy está enfocada (con gran abuso de lenguaje, pero sin profundidad, en muchas cuestiones), nos permite concluir, al menos parcialmente, que la formación matemática de la inmensa mayoría de los alumnos de BUP es un buen aprendizaje de las técnicas matemáticas (manejo mecánico de conceptos y fórmulas), frente a las dificultades inherentes a los conceptos matemáticos, que tienen como fundamento dichas técnicas.

Así aunque parezca una frase dura, pero que creemos real, se obtiene un gran «éxito parcial», si casi todos los alumnos saben al terminar el BUP manejar perfectamente todas las técnicas matemáticas de este nivel, y pensamos que sólo en casos aislados existen alumnos que logran entender, no sólo las técnicas, sino también los conceptos matemáticos que son soporte de dichas técnicas.

¿Cuál es la causa de este éxito parcial? Entre otras, la causa primordial que podemos señalar para la inducción matemática, límite, continuidad, etc. (estos últimos manejados frecuentemente por la técnica del ϵ, δ), es que se manejan conjuntos y enunciados matemáticos, sobre conjuntos infinitos, y esto es un fuerte hándicap para alumnos que no entienden el concepto de infinito en sus diferentes descripciones (algebráicas, topológicas, etc.). Otra causa es la idea que los alumnos tienen de que un determinado problema posee un número finito de soluciones y les choca el hecho de que en los problemas sobre continuidad, límite, etc., aparecen problemas con infinitas soluciones, es decir, los entornos adecuados que se enuncian, por ejemplo, en dichos conceptos.

El objetivo primordial de este trabajo es señalar las ventajas y la metodología de la inducción, habiendo seleccionado un conjunto de demostraciones, problemas y afirmaciones que permitan entender mejor la utilidad, técnica y significado del método de la inducción matemática, tanto dentro de ella como de su aplicación y utilización en la ciencia, en el sentido de K. Popper.

2. El método de inducción completa, su descripción

Hay diferentes formas equivalentes de construir el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$; formas que utilizan la teoría de conjuntos, con los números cardinales y ordinales o el método axiomático debido a G. Peano.

2a. *Los postulados de Peano y la inducción finita.*—Una de las funciones básicas matemáticas es la llamada función sucesor o siguiente de Peano, que se definió así: $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, es la aplicación,

En términos de la función s, un número de propiedades básicas pueden ser formuladas para caracterizar al conjunto de los enteros positivos $\mathbb{N}$. Estas propiedades, conocidas como los postulados de Peano, pueden resumirse así:

a) $1 \in \mathbb{N}$.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces, $s(n) \in \mathbb{N}$.

c) Para ningún n es $s(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Si $s(n) = s(m)$ entonces $n = m$.

e) Cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ que contenga a 1, y que contiene a $s(n)$ siempre que contenga a n, es igual a $\mathbb{N}$.

El postulado e) da lugar a uno de los más importantes principios de la matemática.

Teorema 1.—(El principio de inducción finita).

Sea $P(i)$ una proposición o enunciado, que para cada entero i —, puede ser verdadero o falso. Para probar que $P(i)$ es verdadero para todos los enteros $i \geqslant i_0$ es suficiente probar que: (i) Base o partida $P(i_0)$ es verdadera, y (ii) (Etapa de inducción o hipótesis de inducción). Para todo $k \geqslant i_0$, admitamos que $P(k)$ es verdadero, implica que $P(k+1)$ es verdadero.

Demostración.—Definimos $P'(i) = P(i + i_0 - 1)$. Así, para probar que $P(i)$ es verdadera para todos los enteros $i \geqslant i_0$, será suficiente probar que $P'(i)$ es verdadera para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora definimos $S = \{ i \mid i \in \mathbb{N}, P'(i)$ es cierto $\}$. Si la condición (i) en el teorema 1 se verifica, entonces $P(i_0) = P'(1)$ es verdadero, y aquí $1 \in S$.

Si la condición (ii) se verifica, entonces, para $k \geqslant i_0$, la verdad de $P(k)$ implica la verdad de $P(k+1)$; de aquí para todo $k \geqslant 1$, la verdad de

$$P'(k+1) = P(k+1+i_0-1) = P(k+i_0).$$

$P'(k) = P(k + i_0 - 1)$ implica la verdad de

Así, si $k \in S$ hemos deducido que $k+1 \in S$ por el postulado (*e*) de Peano, tenemos $S = \mathbb{N}$.

En conclusión, si (i) y (ii) se verifican $P'(i)$ es verdadera para todo $i \in \mathbb{N}$ y de aquí $P(i)$ es verdadero para todo $i \geqslant i_0$.

(*Continuará.*)