ABRAHAM BAR HIYYA (1070-1136), Y SU *LIBRO DE GEOMETRIA*

por

FRANCISCO SÁNCHEZ FABA

Tal y como se apuntó en un trabajo nuestro publicado no hace mucho tiempo (1), nos vamos a ocupar en lo que sigue del estudio somero del «Libro de Geometría» escrito a finales del siglo XI o comienzos del XII por el judío español R. Abraham Bar Hiyya, al que nos referimos brevemente al final del trabajo al principio recordado.

Pero antes de entrar de lleno en el examen de la obra citada, no estará de más el hacer algunas breves referencias sobre la personalidad de su autor como también acerca de su obra científica completa, ya que, como es sabido, ésta no se circunscribió solamente al campo de la Matemática, antes al contrario abarcó a otros como los de la Astronomía y la Filosofía e incluso a los estudios rabínicos y a la traducción de obras islámicas al hebreo, en todos los cuales es considerado como una autoridad indiscutible.

* * *

Muy escasos son los datos biográficos que acerca de Abraham bar Hiyya han llegado hasta nosotros, al que con frecuencia se le conoce con el sobrenombre de Sabasorda, quizá por haber desempeñado en alguna ciudad musulmana, tal vez en Zaragoza, antes de su emigración, el cargo de gobernador, ya que se cree que éste puede ser modificación del título arábigo Sahib-al Surta, que viene a significar jefe de la guardia. Sin embargo, de lo cual los autores judíos prefirieron llamarle ha-Nasi, el príncipe, por razones genealógicas más bien que por motivos políticos.

Otros apelativos recibió también nuestro autor, tales como el de R. Abraham el Español, y Abraham Judaeus, todos los cuales ponen claramente de relieve la importancia y aprecio que mereció de sus contemporáneos a la vez que la alta estima que sus escritos merecieron o alcanzaron no sólo de sus coetáneos sino también a lo largo de los siglos que siguieron a su muerte.

Y entre las escasas noticias que poseemos acerca de su vida puede afirmarse que nació o al menos vivió en Barcelona hacia el año 1070, por cuya circunstancia se le ha llamado «el Barceloni», y que luego de haber vivido y trabajado en dicha ciudad durante bastantes años, residió probablemente en Provenza, muriendo después del año 1136.

* * *

Antes de comenzar la exposición y estudio de la obra geométrica de Bar Hiyya, no estará de más el hacer algunas breves consideraciones acerca del estado de los conocimientos matemáticos en el Occidente Europeo a lo largo de los siglos XI-XII y de manera especial entre los judíos españoles de la época.

Recuérdese a tales efectos que como ha escrito Torroba y Bernaldo de Quirós (2) «El de la Sinagoga es un rito matemático, geométrico con los números de las Tablas de la Ley, el triángulo y el candelabro de los siete brazos; ése es el número cabalístico». A lo que hay que agregar la importancia que para el pueblo judío tenía y tiene el cálculo del Calendario, tanto en lo que se refiere a la fijación de sus fiestas, como a las diferentes divisiones del tiempo (años, meses, semanas y días).

Y si a todo eso se añaden las exigencias de la vida ordinaria en cuanto eran imprescindibles el empleo de pesas, medidas y otras evaluaciones exigidas por las transacciones ya entre pueblos, como entre individuos, no es de extrañar que desde un principio la ciencia del cálculo tuviese para los judíos un interés especial. Y es en este campo en donde, entre otros, destacan los nombres de los sefarditas Ibn Daham, natural de Zaragoza, Martín de Toledo, Patricio Sinot, profesor de Santiago y otros; especialmente el famoso filósofo Benito Spinoza, autor de un trabajo sobre el cálculo de probabilidades.

Pero seguramente que los judíos más famosos que cultivan la Ciencia durante la Edad Media, fueron Abraham Benesra, el Toleitolí, nacido en Toledo el año 1092, el cordobés Maimónides (1135-1204) y el barcelonés A. bar Hiyya (1070-1136) objeto del presente trabajo (3).

Ahora bien, las frecuentes emigraciones que las casi constantes guerras de la época imponían a los pobladores de la península trajo como consecuencia, según observa el prof. Suárez Fernández en un libro reciente (4) «el engarce entre las dos culturas, cristiana y judía, en Toledo y la prosperidad alcanzada pronto por las juderías del Nordeste de la Península permitieron la conformación en una primera etapa de una ciencia específicamente sefardita». Y formando parte de esa a la que el citado profesor denomina «Primera generación de sabios en territorio cristiano», se encuentran entre otros, Mosés Sefardi (llamado Pedro Alfonso, después de su bautismo) y Abraham bar Hiyya (5).

Finalmente y como confirmación de cuanto antecede bastará el recordar que en tiempos de Sancho IV (año 1280) los judíos de Toledo acordaron fabricar unos tipos correctos para las unidades de pesos y medidas.

En relación con la significación de Abraham bar Hiyya dentro del campo de la ciencia sefardita no estará de más el recordar que según afirman Geoffrey Wigoder y Barry Spain en la última edición (1971), de la Encyclopedia Judaica (6), aquél fue en el siglo XII español una de las figuras más sobresalientes por su obra enciclopédica, dedicada especialmente al estudio de cuestiones astronómicas y matemáticas como se puede comprobar por la relación de las que han llegado hasta nosotros (7). Por cierto que al referirse Sarton a la que lleva un lugar preeminente entre sus nuevos dominadores cristianos cuyo bajo nivel científico fue el motivo de que se erigiera en su maestro, a cuyas tareas puede decirse se consagró, tanto mediante sus escritos originales, como por medio de la traducción de las obras de autores clásicos a los que antes se ha hecho referencia (11).

Y es que, como es sabido, desde finales del siglo VIII hasta los últimos años del XI las principales figuras científicas habían sido musulmanas y en árabe habían escrito sus obras, pero al terminar la última centuria su hora había pasado al mismo tiempo que entre los cristianos y los judíos crecía cada vez con mayor vigor el interés por todo cuanto con la ciencia se relacionaba. De aquí la importancia de las traducciones al latín y al hebreo de las creaciones del mundo musulmán, para lo que fueron en extremo importantes la excelentes relaciones existentes a la sazón entre los judíos españoles con los de Oriente. Todo ello pone claramente de relieve la importancia de la labor de los traductores, entre los que alcanzó un lugar preeminente nuestro bar Hiyya (12).

* * *

Del conjunto de su obra científica sólo nos vamos a ocupar de la intitulada *Libro de Geometría*, o simplemente *Geometría*, cuya traducción al cata-Millás Vallicrosa en 1931 (13), y que forma un volumen en 4.º menor de 150 páginas, 123 figs. más dos apéndices, índice y fe de erratas, con numerosas notas y comentarios del traductor al texto original puestas a pie de página.

Comienza este libro con una introducción del traductor (págs. I-XXIX) en la que expone la razón, el carácter y el contenido de la obra, ocupándose a seguida de los manuscritos que de la misma han llegado hasta nosotros, así como de la traducción resumida que de este libro se hizo al latín y de la influencia de ésta.

A esta introducción sigue el libro de bar Hiyya. el cual se abre con un prólogo (págs. 1-8) que principia con la invocación: «*¡Bendito y alabado sea el Dios grande y admirable...!*» (p. 3).

Hace a continuación numerosas referencias a diversos textos de la Sagrada Biblia, a fin de resaltar la importancia de cuanto al cálculo se refiere, advirtiendo que un hombre que no conozca la ciencia de la medida no podrá distribuir o medir terrenos, dando a cada parte lo que le es debido en justicia y recordando que Dios creó el Mundo con número, medida y peso.

Dice después que referente a la Aritmética o ciencia de los números, no precisaba escribir un libro en la *lengua Santa*, ya que la gente sabe lo bastante para los usos ordinarios, y agrega «*En cambio la ciencia de la medida (Geometría) es tan útil como la Aritmética, pero es difícil e inasequible para la mayoría de la gente, por lo cual hay que explicarla a su alcance. Ella es indispensable para la medida de las tierras y para la partición entre los herederos y consocios, de manera que no se pueden llevar a cabo estos asuntos, si no es basándose en aquélla*» (p. 5).

Y completa sus argumentos con esta prueba decisiva: «*Yo he visto que la mayoría de los sabios contemporáneos en la tierra de Francia no están instruidos en la medida de los terrenos ni expertos en su partición, por lo que se confunden frecuentemente dividiendo los terrenos entre los here-*

deros consocios con inexactitud, con lo cual pecan, según la perturbación que causan. No creais que ellos sean los verdaderos calculadores y agrimensores, sino unos falsarios que en lugar de emplear el cálculo se valen del fraude.» Y añade: «*Porque no hay peor defraudación que la que viene por sus manos, es muy posible que con ellas aquél a quien corresponde el tercio reciba el cuarto y viceversa.*» (p. 5.)

Hace después algunas consideraciones respecto a la opinión de los Rabinos acerca de estos mismos problemas y agrega textualmente: en el cuadrado «*de lados iguales y ángulos iguales, la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado es igual a la unidad más dos quintas partes más casi una setenava parte*» (p. 6). Es decir que

$$\frac{d}{l} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{70} = 1 + 0'4 + 0'0142 = 1'4142 = \sqrt{2}. \quad \left\} \begin{array}{l} d. \text{ diagonal} \\ l. \text{ lado} \end{array} \right.$$

con lo cual bar Hiyya nos da a conocer el valor de la $\sqrt{2}$ con cuatro decimales.

Todavía insiste más el autor en la importancia de estas tareas y así recalca: «*El agrimensor es nombrado Juez y la Ley le obliga a abstenerse de obrar malamente*» (p. 7).

El *Libro de la Ciencia de la Geometría* (que es como lo titula su autor) se encabeza con la frase «*Con la ayudà de Dios*» y principia por advertir que todo el que quiera dedicarse a la práctica de la agrimensura, debe deconocer los principios aritméticos y geométricos fundamentales, y a cuya exposición está dedicado el cap. I, anunciando que en el II se tratará de la medida de los terrenos según sus formas, en el III de la partición de todas las figuras y de sus diversas medidas, y en el IV y último de la medición de pozos, cuevas, torres, etc. (p. 9).

Da comienzo el cap. I recordando que todas las ciencias, las artes y los oficios hacen uso de un vocabulario especial, el que no es bien conocido por la gente, por lo que resulta preciso (como antecedente necesario) el explicar claramente el significado de las palabras que en el desarrollo de una cierta disciplina se usan, más aún cuando es frecuente el que a una misma palabra se le puedan atribuir varios sentidos (p. 11).

Atendiendo a tales razones define lo que debe de entenderse por *razón*, *punto*, *linea*, *plano* y *cuerpo*, para tratar a seguida del ángulo y sus diversas clases, de las rectas paralelas y oblicuas, de la diagonal y del círculo. Todos esos elementos son definidos con absoluta corrección (págs. 11-13).

Se ocupa luego de los triángulos, cuadriláteros y polígonos, explicando sus diversas clases, y termina esta parte diciendo que todos esos principios o nociones pertenecen a la Geometría (págs. 14-16).

Respecto a las definiciones fundamentales de la Aritmética, recuerda con exactitud las de *unidad*, *número*, *cuadrado*, *cubo* y la *razón* entre dos números, y desarrolla varias proposiciones o teoremas que demuestra geométricamente.

Tal, por ejemplo, que si se divide una recta en dos segmentos a y b se verifica que (p. 17):

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b.$$

Otras propiedades que Bar Hiyya demuestra por consideraciones gráficas, pueden expresarse algebraicamente por las siguientes expresiones que son utilizadas en el resto de la obra (pp. 18-20):

$$a\,b + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = (a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(a+b)^2 + a^2 = 2\,a\,(a+b) + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$(a+b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + b\right)^2$$

Igualmente se ocupa de las clases de triángulos, de sus propiedades y de los casos de semejanza de los mismos, de los paralelegramos, etc., realizando todas las demostraciones gráficamente.

El cap. II trata de la medida de las tierras, y es el más extenso, pues abarca desde las páginas 31-94. Toma el autor como unidad el *codo* cuadrado y distingue las siguientes cuatro partes:

Parte primera: Medida de los cuadriláteros que tienen sus lados iguales y sus ángulos rectos.

Parte segunda: De la medida de los triángulos.

Parte tercera: Medida de los cuadriláteros cuyos lados no son todos iguales ni sus ángulos son todos rectos.

Cuarta parte: De la medida de los campos de forma circular, semicircular o más o menos semicircular.

En la primera parte se calcula el valor del área del cuadrado y del rectángulo en función de dos de sus lados, estudiando después los casos de aquellos cuadriláteros que aún teniendo sus lados iguales «puede que sea difícil con la vista medir los ángulos, que aunque puedan parecer rectos, pueden no serlo» (p. 33). En tales casos y habida cuenta de que las diagonales de los mismos se cortan en sus puntos medios formando entre sí ángulos rectos, se obtiene el área multiplicando la mitad de la longitud de una de las diagonales por la longitud entera de la otra. Tal es, como el autor dice, el caso del rombo. De este método da b. Hiyya una demostración gráfica.

Propone y resuelve a continuación cuatro problemas, en el primero de los cuales demuestra gráficamente el teorema de Pitágoras (p. 34).

Un problema muy notable es el planteado en el párrafo 47 (p. 36) y que formula así: «En un cuadrado del área del cual se resta la suma de sus cuatro lados y la diferencia es 21 codos, ¿cuál es su área y la longitud del lado?» Resuelve esta cuestión numérica y gráficamente de modo riguroso. Y planteados en términos algebraicos, es evidente que si es x la longitud del lado del dicho cuadrado el problema se puede plantear así:

$$x^2 - 4\,x = 21.$$

y el valor de x vendrá dado por la expresión:

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4 \times 21}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{100}}{2} = 7.$$

El lado, pues, vale 7 codos y el área del cuadrado: $l^2 = 49$ codos.
Según bar Hiyya la resolución de este problema puede formularse así:

$$l = \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 21} + 2 = 7.$$

Nótese que en este caso se prescinde de la raiz negativa que es -3, ya que $x^2 > 4x$.

En los párrafos siguientes se prononen otros problemas análogos, los que también son resueltos por métodos gráficos a la vez que se demuestran sus soluciones geométricamente, y cada uno de ellos da lugar a una ecuación de segundo grado de las siguientes formas:
(p. 38, 49)

$$x^2 + 4x = 77. \qquad x = 7.$$
$$4x - x^2 = 3.$$

Esta última ecuación tiene dos soluciones que son 3 y 1 tal como explica el propio bar Hiyya.

Nuevas ecuaciones de segundo grado emplea nuestro autor al exponer los teoremas referentes al rectángulo, los que análogamente a lo hecho en los casos precedentes son resueltos por él geométricamente, principiando por el cálculo del valor de la diagonal en función de los valores de los dos lados, y aplicando en tal caso el teorema de Pitágoras obtiene la solución.

Expone y demuestra otros casos referentes al rectángulo y cuyas soluciones, en términos analíticos, pueden obtenerse mediante la expresión (p. 42):

$$x^2 + (A + x)^2 = B^2, \quad \text{de donde} \quad x = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2 - A^2}{2}}$$

También en esta ocasión propone problemas que dan lugar a ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, tales como

$$\left.\begin{array}{l} xy = a. \\ x + y = b. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a. \\ x^2 - y^2 = b. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} xy = a. \\ x^2 + y^2 = b^2. \end{array}\right\}$$

De todo lo cual se deduce claramente que es a Bar Hiyya a quien se debe

ABRAAM BAR HIIA

LLIBRE DE GEOMETRIA

Hibbur hameixihà uehatixbòret

SEGONS EL TEXT EDITAT I PROLOGAT PEL

DR. MIQUEL GUTTMANN

VERSIÓ DE L'HEBREU PER

J. MILLÀS I VALLICROSA

PROFESSOR D'HEBREU A LA UNIVERSITAT DE MADRID

BARCELONA

EDITORIAL ALPHA

1931

Portada del TRATADO DE GEOMETRIA. Por Abraham Bar Hiyya la introducción de la ecuación de segundo grado en Europa, divulgada por la traducción al latín que Platón de Tívoli llevó a cabo del libro del matemático sefardita en el año 1145.

La parte segunda se ocupa de la medida de los triángulos y principia recordando que los mismos se dividen en equiláteros, isósceles y escalenos, exponiendo los caracteres distintivos de cada una de esas clases.

Dice que el área del triángulo es igual a la mitad de la base multiplicada por su altura, o a la mitad de ésta multiplicada por la primera, calcula el valor de la altura por el teorema de Pitágoras y añade (p. 48): «*si quieres más facilidad, sepas que el área del triángulo equilátero es igual al tercio del cuadrado del lado más su décima parte*». Lo que puede expresarse así:

$$\mathbf{Area} = \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{10} = \frac{13}{30} l^2. \quad (l \text{ valor del lado}).$$

Fórmula que fue dada a conocer y usada desde diez siglos antes de Bar Hiyya, por el geopónico gaditano Lucio Junio Columela en su *Tratado de Re Rústica*, escrito en el siglo I de nuestra Era, y cuya principal ventaja es el necesitar solamente medir el valor del dicho lado para obtener el área buscada (14).

En los triángulos isósceles calcula su área aplicando la fórmula general ya dicha, utilizando como siempre el teorema de Pitágoras para obtener el valor de la altura del triángulo, y dice que todos esos conocimientos se derivan del modo de calcular el área del rectángulo.

En cuanto a los triángulos escalenos los divide en rectángulos, obtusángulos y acutángulos, exponiendo con ejemplos numéricos el modo de calcular su altura en los diversos casos, siempre por medio del teorema de Pitágoras como en los casos precedentes.

Y termina esta parte exponiendo el que llama *método de los excesos* que formula así:

$$\text{(p. 59)} \quad \text{Area} = \sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)}$$

siendo A, B y C, los valores de los lados del triángulo y S el de la semisuma de aquéllos, añadiendo que no lo demuestra porque su exactitud la demuestra el cálculo.

Se trata, pues, del conocido principio de Herón de Alejandría, aunque formulado de manera distinta.

En la tercera parte y siguiendo procedimientos análogos, se exponen las reglas para el cálculo de las áreas de los trapecios y de los trapezoides, en sus diversos casos, dando las correspondientes demostraciones gráficas. A veces descomponiendo las figuras en triángulos y rectángulos.

Comienza por mencionar un método práctico empleado en las ciudades de Sarfat (Francia), según el cual hacen las medidas sin preocuparse de los ángulos, lo que advertía Bar Hiyya les lleva a cometer errores no pequeños en la medida de las heredades.

La cuarta parte está dedicada a exponer la manera de medir las tierras (p. 71) por título *Hibbur ha-meshihah ve-ha-tishboret,* a la que llama Tratado de Geometría Práctica, escrito en el año 1116, afirma éste que fue compuesta para ayudar a los agricultores judíos del Sur de Francia, de Cataluña y de Castilla en la medición y partición de sus campos, en cuyas operaciones venían cometiéndose errores desde hacía siglos. Esta obra en un principio fue escrita en hebreo, y más tarde traducida al latín por Platón de Tívoli en 1145, bajo el título de Liber Embadorum *(Liber de Areis).*

Y para valorar esa obra desde el punto de vista práctico, prescindiendo por el momento de su valor científico, bastará el recordar la enorme importancia que entre las comunidades judías españolas de aquellos siglos significaba cuanto hacía referencia a la agricultura, ya que a lo largo de toda la Edad Media una de las ocupaciones del pueblo sefardita fue el cultivo de los campos, los que se explotaban ya directamente por sus propietarios, bien por arrendatarios, y en cuyas tareas llegaron a adquirir grande y merecida fama especialmente como viñadores y hortelanos. Quizá por ello no se dictaron hasta su expulsión decretada, como se sabe, por los Reyes Católicos en el año 1492, disposiciones legales que limitasen la importancia de los predios que podían ser adquiridos por judíos, quienes al comprarlos a los cristianos seguían abonando a la Iglesia los correspondientes diezmos (8).

Y fue así como los judíos llegaron a poseer grandes heredades, en diversas regiones españolas, pero de manera especial en Castilla (9).

Cuanto precede justificaba de sobra la necesidad de corregir los errores ya apuntados que en la medida de las tierras se venían cometiendo desde siglos atrás y la altísima estimación que el libro de Abraham bar Hiyya mereció desde un principio y por muchos siglos. Y por sí quedare alguna duda sobre este particular recuérdese el hecho singular de que el dicho libro estuvo como obra de texto en las escuelas cristianas a lo largo de varias centurias.

Otros escritos del mismo autor en los que se trata de Aritmética teórica y práctica, Geometría, Optica y Música, se hallan en la obra intitulada *Yesodé ha-Tebuna U-Migdal Ha-Emuna,* y de la que solamente algunos fragmentos han llegado hasta nosotros, y cuyo título en nuestra lengua es *Fundamentos de la Inteligencia y Torre de la Creencia,* pero esos capítulos en lo que a las dos primeras disciplinas se refieren, bastan para poner de relieve el mérito de esta obra enciclopédica tan interesante que no renunciamos a comentarla en otra ocasión.

Tampoco diremos nada, por el momento, acerca de los trabajos astronómicos de nuestro autor, que bien merecen un estudio aparte y cuidadoso, ni de sus traducciones de obras científicas, pero no pueden dejar de mencionarse las versiones que tanto él como otros traductores del siglo XII llevaron a cabo, tanto de toda la ciencia oriental, como las originales del mundo clásico, tales como las obras de Aristóteles, Arquímedes, Ptolomeo, Euclides, etc., y que gracias a los trabajos de ese grupo de sabios pudieron ser conocidas por aquella sociedad naciente. Pues como afirma G. Sarton (10) «Fue él (A. b. Hiyya) uno de los líderes del movimiento que llevó a los judíos de Provenza, España e Italia a llegar a ser los transmisores de la ciencia árabe al Occidente Cristiano» y uno de los creadores del lenguaje científico hebreo.

El gran prestigio que por sus obras adquirió Bar Hiyya, le llevó a ocupar *de forma circular completa, semicircular o más o menos semicircular,* y comienza enseñando el modo de obtener el área del círculo con estas palabras: «Se podrá saber el área del círculo si es conocida su diagonal o diámetro..., multiplicando el diámetro por 3 y 1/7 y tendrás la longitud de la circunferencia, multiplica después la semicircunferencia por la mitad del diámetro y tendrás el área del círculo».

Lo que se puede formular así, siendo L la longitud de la circunferencia y D su diámetro:

O sea

$$L = D \times 3 \text{ y } 1/7. \qquad 3 \text{ y } 1/7 = 3{,}1428571.$$
$$L = D \times 3{,}1428571$$
$$L = 2\pi r. \qquad (\pi = 3{,}1428571.)$$
$$(\text{S, área del círculo}) \quad S = \pi r^2 \qquad (r \text{ radio del círculo}).$$

Notemos que este valor de π que nos da Bar Hiyya era ya conocido y empleado por Columela diez siglos antes, de donde bien pudo haberlo tomado (15). Y otro tanto puede decirse respecto a la fórmula del área del círculo.

Pero que ese valor de π no era original de bar Hiyya, lo revelan sus propias palabras cuando nos dice: «Pero los que profundizan en eso (se refiere al valor de π) y son los astrónomos dicen que la razón de la circunferencia al diámetro es de más 8 y 1/2 partido por 60».

O sea que en este último caso sería: $\pi = 3{,}1416$ (p. 74).

Valor menos exacto que el precedente.

La explicación que nos da para medir el área del semicírculo (mitad de la cuerda), multiplicada por la mitad del arco, o sea

$$\text{Area del semicírculo} = \frac{22}{14} \times r^2. \quad \text{(p. 77).}$$

Fórmula que también nos dio Columela (16).

Otro procedimiento da bar Hiyya para la obtención del área del semicírculo, puede ser expresado así

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(D^2 - 1/7 - 1/14). \quad \text{(D, diámetro).}$$

Da las reglas para obtener el área del segmento circular en los diversos casos, las cuales demuestra como siempre gráficamente. Y añade a continuación: «A base de lo que se ha explicado podrán medirse las áreas de las figuras circulares, o bien compuestas por rectas y arcos de círculo». Y entre los casos considerados está el de la elipse, cuya área explicada y demostrada como en los casos precedentes, podemos expresar por la siguiente fórmula:

$$\text{(p. 81)} \quad A = a \cdot b \cdot \pi \quad (a \text{ y } b \text{ semiejes}).$$

Da a continuación una tabla empleada por los astrónomos para la transformación de las cuerdas en arcos y que va dividida en cuatro columnas: en la 1.ª constan las cuerdas divididas en 28 partes, en la 2.ª los arcos correspondientes a cada una de ellas, en la 3.ª los minutos y en la 4.ª los segundos que corresponden a cada uno de los 28 valores de la 1.ª (pp. 82-83).

Divisiones de la cuerda	Divisiones del arco		
	Grados	Mins.	Segs.
1	1		3
2	2		8
3	3		25
4	4		55
5	5	1	44
6	6	2	57
7	7	4	42
8	8	7	1
9	9	9	59
10	10	13	42
11	11	18	33
12	12	24	23
13	13	31	29
14	14	40	
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	36
18	19	33	29
19	20	53	29
20	22	17	10
21	23	45	19[2]
22	25	19	4
23	27		1
24	28	50	36
25	30	54	52
26	33	20	55
27	36	29	29
28	44		

Del examen de esta tabla se deduce, como observó Millás Vallicrosa, que al valerse Bar Hiyya de la cuerda en lugar del seno siguió la influencia de los autores árabes, en lugar de la de los griegos; que si adoptó como base de sus cálculos los valores de la cuerda en vez de los del arco, fue para evitar a los agrimensores la medida de ángulos, a excepción del recto, de acuerdo con el carácter general de su libro, ya que aquéllos no disponían de aparatos precisos para medidas angulares. Como se ve en ella bar Hiyya para sus cálculos dividió el diámetro en 28 partes y la circunferencia en 88, cada una de éstas en 60, y a su vez cada una de estas últimas también en 60.

Así la equivalencia entre los valores dados por la tabla y los nuestros, puede establecerse como sigue:

Bar Hiyya......	$r = 14.$	$2\pi r = 88.^{\circ}$
Nosotros:.......	$r = 1.$	$2\pi r = 360.^{\circ}$

De donde se deducen fácilmente las equivalencias entre ambas.

Y no estará de más el recordar que según J. M. Guttman, en la traducción que de la Geometría de bar Hiyya publicó en hebreo (Berlín, 1912) el error con que el matemático sefardita calculó su tabla es inferior a 1″ de nuestro sistema.

Como aplicación de la tabla se enuncian y resuelven a continuación una serie de problemas que con frecuencia se presentan en la práctica.

En la parte quinta se ocupa de la Medida de las figuras que exceden de cuatro lados y luego de hablar de sus clases (pentágono, exágono, etc.), advirtiendo que sus ángulos pueden ser o no iguales, demuestra gráficamente que en un polígono regular circunscrito a un círculo su área es igual al producto del semidiámetro por el semiperímetro (p. 88).

Y como todos los polígonos no son inscribibles en una circunferencia, el área buscada será la suma de las áreas de los triángulos en los que aquéllos deben ser descompuestos (p. 91).

Hasta ahora ha supuesto el autor que se trataba de medir terrenos llanos pero como también puede necesitarse calcular la extensión de valles o de laderas montañosas aconseja las reglas que los agrimensores deben seguir en tales casos.

Capítulo III. Sobre la explicación de lo que se refiere a la división de las áreas. De acuerdo con este enunciado se exponen aquí las maneras de dividir los terrenos de forma triangular o rectangular entre dos o más propietarios, ya sea en partes iguales o diferentes para cada uno según los casos que considera (pp. 95-110).

Y finaliza el capítulo advirtiendo que «la división de las figuras circulares no tiene dificultad, y no hay que explicarla si se les divide desde el centro» (p. 111).

El capítulo IV, que es el último, se ocupa de *La medida de los cuerpos*. Es decir, de la medida de sus respectivos volúmenes.

Y lo primero que bar Hiyya nos dice es que en Sefarad (España) para tales efectos se toma como unidad el codo cúbico, que es cuerpo «la superficie del cual está formada en las tres dimensiones por un codo cuadrado... que tiene un codo lineal en las tres dimensiones». Equivalía a 8 arrobas de agua y cada arroba a 30 libras de 12 onzas (p. 115).

Lo primero que determina es el volumen del cubo, a lo que sigue los de los prismas y cilindros, demostrando que en todos esos casos el volumen es igual al área de la base multiplicada por la altura.

Calcula luego el volumen de las pirámides (área base por un tercio de altura, determinando esta última por el teorema de Pitágoras). Sigue el cálculo de los volúmenes de los cilindros, así como el de los troncos de pirámide, y del tronco de cono.

Y finaliza exponiendo el modo de calcular el volumen de la esfera y de sus partes para lo que recuerda (p. 124) «que según los geómetras (se obtiene) multiplicando el cuadrado del diámetro por 3 y 1/7, con lo cual tendremos la superficie de la esfera; y multiplicando esto por 1/6 del diámetro tendremos el volumen». Lo que puede expresarse así:

$$\text{Superficie esférica} = D^2 \times 3 \text{ y } 1/7. = 4\pi r^2 = \pi D^2$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot D^3$$

(r radio de la esfera y D su diámetro).

De cuyas fórmulas pueden deducirse los valores de los volúmenes de las partes de la esfera.

(Págs. 126-134). Bajo el título de *Explicación de la manera de medir,* dedica bar Hiyya casi las últimas palabras de su libro a dar instrucciones para efectuar las medidas de las tierras, de acuerdo con sus respectivas formas y de manera que sean exactas, al mismo tiempo que los más fáciles de realizar habida cuenta de la principal finalidad de su obra, y apoyándose siempre en los principios geométricos establecidos rigurosamente en el libro que hemos comentado, va examinando todos los casos posibles que se presentan en la práctica de la agrimensura e indicando en cada uno de ellos la manera de proceder, presentando para mejor ilustración del lector numerosos ejemplos prácticos.

Expone después algunas consideraciones sobre ciertas medidas de líquidos mencionadas en diversos pasajes del *Antiguo Testamento* y hace algunas consideraciones bíblicas (sobre el mar de Salomón [p. 134], etc.). Y pone fin a su Geometría (p. 142) con estas palabras:

«Está completo el libro Tratado del cálculo y de la medida. A Dios por que es la fuerza y la majestad sea la alabanza, y merezca ver el copista del Hijo de David el esplendor.»

* * *

Hasta aquí cuanto en una exposición quizá demasiado rápida puede decirse sobre la Geometría de Bar Hiyya, en cuyas páginas se encuentran perfectamente sistematizados y explicados los principios de esta rama de la Matemática, pero además, justo es reconocerlo, gracias a su obra el Occidente Medieval Cristiano conoció por primera vez un valor de $\sqrt{2}$ con cuatro decimales, la ecuación de segundo grado y la fórmula de Herón de Alejandría (284-221 a. de J. C.) sobre el área del triángulo en función del semiperímetro. Y todo ello además de lo fundamental de la Geometría de Euclides.

Al conocimiento y difusión de la obra del judío español entre los pueblos cristianos, influyó decisivamente la traducción que de ella realizó al latín Platón de Tívoli en el 1145, y que como ya se dijo al principio sirvió de texto durante siglos en las escuelas cristianas, no siendo nada de extrañar la influencia que este libro ejerció durante centurias en cuantos hombres de ciencia se preocuparon de tratar de Geometría.

BIBLIOGRAFIA

(1) SÁNCHEZ FABA, Francisco: *Las áreas de las figuras planas según Columela*. Cursillos de Didáctica Matemática, XVI, pág. 34, Madrid, C. S. I. C., 1978.

(2) TORROBA Y BERNALDO DE QUIRÓS, Felipe: *Los judíos españoles*. Toledo, 1977, pág. 344.

(3) VERA, Francisco: *Historia de la Ciencia*. Barcelona, Joaquín Gili, 1937, pág. 154. *La Matemática en el Occidente latino medieval*. Ed. López Negri, Buenos Aires, 1956, p. 106 y siguientes.

(4) SUÁREZ FERNÁNDEZ, Luis: *Judíos españoles en la Edad Media*. Madrid, Rialp, S. A., 1980, pág. 76.

(5) SUÁREZ FERNÁNDEZ, Luis: *Loc. cit.* MILLÁS VALLICROSA, José M.ª: *Assaig d'Historia de les Idees Fisiques i Matematiques a la Catalunya Medieval*. Barcelona, 1931, págs. XI, 74, 164, 166, 208, 248.

(6) SPAIN, Barry: *Encyclopedia Judaica*. Vol. 11, Jerusalem, 1971, columnas 1122-1123. WIGODER, Geoffrey: *Encyc. Judaica*. Vol. 2, cols. 130-133.

(7) SARTON, George: *Introduction of the History of Science*. Vol. II, Parte I, Washington, 1931, pág. 207. Principales trabajos originales de Abraham bar Hiyya y sus traducciones al español:

(A) *Yesod ha-tebunah u-migdal ha-emunah*. Fundamentos de la inteligencia y torre de la creencia. Obra enciclopédica que trata de Matemáticas, Astronomía, Optica y Música. Casi completamente perdida y de la que han llegado hasta nosotros sólo algunos trozos o fragmentos. Edición crítica con traducción, prólogo y notas por el prof. José María Millás Vallicrosa. Barcelona, 1952, 92 páginas de texto en español y 50 en hebreo. Indice.

(B) *Hibbur ha-mesihah ve-ha-tishboret*. Tratado de Geometría Práctica. Escrita en el año 1116 y traducida al latín por Platón oe Tívoli en 1145, con el título de Liber Embadorum. Publicado en catalán según el texto editado y prologado por M. Guttman. Versión del original hebreo por J. M.ª Millás Vallicrosa, bajo el título de *Llibre de Geometria*, 142 págs. de texto, 123 figs. y dos Apéndices, con XXIX págs. de introducción. Barcelona, Tip. Emporium, 1931, Vol. III de la Biblioteca Hebraico-Catalana.

(C) *Zurat ha-erez*. Forma de la tierra. Traducida al latín y al francés. Versión del hebreo al español con prólogo y notas por J. M.ª Millás Vallicrosa. Barcelona, 1956. En 4.º, 156 págs. Indice y una lámina. Obra astronómica.

(D) *Heshbon mahlakot ha-kokabim*. Libro del cálculo de los movimientos de los astros (temas astronómicos). Edición crítica con traducción, introducción y notas por J. M.ª Millás Vallicrosa. Barcelona, C. S. I. C., 1959. Texto español: 149 págs., texto hebreo: 120 págs.

(E) *Luhot ha-Nasi*. Tablas del príncipe. También llamadas Tablas de al-Battani, lo que indica su origen.

(F) *Sefer ha-'ibbur*. Libro o cálculo de la intercalación. Creese se trata del trabajo hebreo más antiguo dedicado especialmente al cálculo del Calendario. Fue escrito entre los años 1122-1123.

(G) *Hegyon ha-nefesh*. Meditación del alma. Es un tratado de Etica, escrito con el espíritu de los judíos neoplatónicos.

(H) *Megillat ha-megallet*. Libro revelador. Libro de carácter astrológico y mesiánico. Vol. I de la Biblioteca Hebraico-Catalana.

Sobre la obra enciclopédica de Abraham bar Hiyya, véanse: Estudios sobre Historia de la Ciencia Española, por José M.ª Millás Vallicrosa, Barcelona, 1949, págs. 219-262.

Sarton (*Op. cit.*, págs. 207-208) de numerosos datos sobre otras ediciones extranjeras de las obras de b. Hiyya, si bien nosotros por razones obvias hemos preferido mencionar solamente las españolas.

(8) AMADOR DE LOS RÍOS, J.: *Historia social, política y religiosa de los judíos de España y Portugal*. Madrid, 1973, págs. 139.

(9) SUÁREZ FERNÁNDEZ, Luis: *Op. cit.*, págs. 48, 49, 70, 75, 95, 177, 256.

(10) SARTON, George: *Op. cit.*, pág. 206. MILLÁS VALLICROSA, José M.ª: *Nuevas aportaciones para el estudio de la transmisión de la Ciencia a Europa a través de España*. Barcelona, 1943.

(11) VERNET, Juan: *Historia de la Ciencia Española*. Madrid, 1975, pág. 75.
— — *La cultura hispanoárabe de Oriente y Occidente*. Barcelona, Ariel, 1978, págs. 115-116.

(12) GARBERS, Karl: *La Matemática y la Astronomía en la Edad Media islámica*. Madrid, C. S. I. C., 1954.

(13) Volumen III de la Biblioteca Hebraico-Catalana.

(14) SÁNCHEZ FABA, Francisco: *Op. cit.*, pág. 33, d).

(15) SÁNCHEZ FABA, Francisco: *Loc. cit.*, l).

(16) SÁNCHEZ FABA, Francisco: *Loc. cit.*, g).