JUEGOS ARQUIMEDIANOS

por

J. Babini

En el *Libro de los lemas*, del cual no se conoce sino su versión árabe, Arquímedes demuestra algunas proposiciones geométricas elementales, aunque originales, que comprueban la equivalencia de un círculo con un recinto encerrado entre semicircunferencias. Tales proposiciones no son sino transposiciones a figuras circulares de algunas de las proposiciones que Euclides demuestra, para figuras rectangulares, en el Libro II de sus *Elementos*. Así, el «arbelos» de Arquímedes no es sino la transposición de la Prop. 4 de ese Libro, mientras que si uno de los semicírculos del «arbelos» se pasa al otro semiplano, se obtiene la fig. 1 en la cual la equivalencia del círculo de centro 0 con el recinto CPAMDQC no es sino la transposición de la Prop. 7 de aquel Libro.

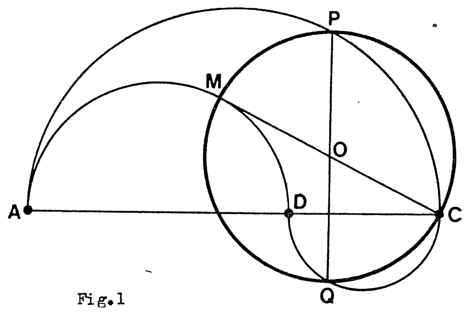

Fig. 1

La fig. 2 muestra otra equivalencia semejante que Arquímedes comprueba para el caso particular A D = B C; mientras que el caso de B entre C y D (fig. 3) proporciona un recinto de aspecto sinusoidal, y el caso D entre B y C un recinto no conexo. La identidad algebraica correspondiente a estos tres casos, que no figura en Euclides, es $(a + b + c)^2 + b^2 = a^2 + c^2 + 2\,(a + b)\,(c + b)$ y su aplicación a estos «juegos arquimedianos» (fuera del caso tratado para $a = c$) no estaba más allá del alcance de Arquímedes, pues en definitiva se trataba de cuestiones vinculadas con segmentos de tangentes comunes a dos circunferencias.

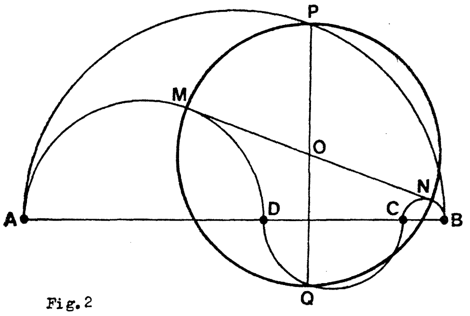

Fig. 2

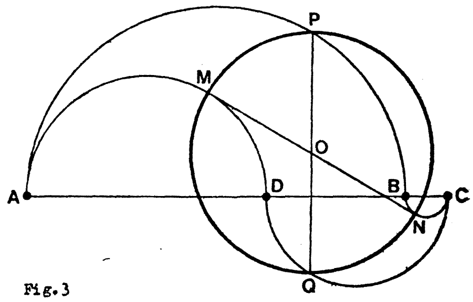

Fig. 3

En cambio, una demostración que abarque todos los casos, está en general más allá de la geometría de los antiguos, más propensos a casos particulares que a generalizaciones.

Tratamos de esbozar esa demostración partiendo de cuatro círculos S_i de ecuación

$$y_i^2 + (x - x_i)(x - x_{i+1}) = 0 ; \quad (i = 1, 2, 3, 4 ; \; x_1 = x_5).$$

Su suma alternada será proporcional a

$$\sum_{i=1}^{i=4} (x_i - x_{i+1})^2 (-1)^i = 2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 + 2 R^2$$

y por tanto proporcional al doble de un círculo de radio R (una adecuada elección de los índices tornará R siempre real).

Consideremos ahora el eje radical de S_1 y S_3 y sus intersecciones y_2 e y_4, respectivamente, con S_2 y S_4 ; tendremos

$$y^2_2 \, h^2 = (x_2 - x_3)^2 R^2 ; \quad y^2_4 \, h^2 = (x_1 - x \, 4 \, x_4)^2 R^2 ; \quad \text{con } h = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$

de manera que alguna de las combinaciones de $y_2 + y_4$ o de $y_2 - y_4$ será igual a R.—J. Babini.

Buenos Aires, 1980.