FUNCIONES DE BESSEL

por

JUAN PEDRAZA GONZÁLEZ

Departamento de Teoría de Funciones, Universidad Autónoma, Madrid

CONCLUSION

Presentamos las funciones de Bessel, por tres métodos de generación de funciones; llegando a obtener las funciones de Bessel como elementos matriciales de las representaciones irreducibles del grupo de las transformaciones del plano euclídeo M_2; método generalizable —considerando otros grupos— para obtener otras funciones especiales.

1. LAS FUNCIONES DE BESSEL Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

En un primer apartado, con un tratamiento que encontramos en cualquier tratado de ecuaciones diferenciales, sabemos que las funciones de Bessel se obtienen en la resolución de

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left[1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right] y = 0 \tag{1-1}$$

ecuación diferencial de Bessel de orden α, que presenta una singularidad regular en $x = 0$, por lo que su resolución se obtiene ensayando soluciones de la forma

$$y = x^{\lambda} \sum_{k \geq 0} a_k x^k, \qquad a_0 \neq 0;$$

llegando a caracterizar las funciones de Bessel de primera especie $J_\alpha(x)$, y de segunda especie $Y_\alpha(x)$;

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \sum \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma_{(n+1)} \Gamma_{(n+\alpha+1)}} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen} \theta - ix\theta} \, d\theta$$

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} J_\alpha(x) \qquad Y_\alpha(x) = \frac{\cos \alpha\pi \, J_\alpha(x) - J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\operatorname{sen} \alpha\pi}$$

que determinan la solución general de (1-1):

$$y = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x), \quad \text{si} \quad \alpha = 0, \alpha \in Z; \quad \text{e} \quad y = C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x) \quad \text{si} \quad \alpha \notin Z.$$

2. LAS FUNCIONES DE BESSEL Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES.

Más general es el método que obtiene las funciones de Bessel, como funciones propias del operador diferencial Laplaciano.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por el método de separación de variables, la resolución de éstas se reduce a la de determinadas ecuaciones diferenciales ordinarias, donde aparece un parámetro arbitrario λ, cuyos posibles valores (autovalores) se determinan por las condiciones de contorno; siendo las soluciones correspondientes a dichos autovalores las funciones propias.

Así, si el operador diferencial es de la forma

$$\text{(2-1)} \qquad \sum F_i(x_1, x_2, \ldots, \check{x}_i \ldots x_n) \frac{1}{Q_i(x_i)} \frac{d}{d x_i} \left\{ f_i(x_i) \frac{d Q_i}{d x_i} \right\} = 0$$

la solución

$$Z = \prod_{i=1}^{n} Q_i(x_i),$$

que se obtiene por el método de separación de variables, se obtiene al resolver las n ecuaciones diferenciales ordinarias autoadjuntas

$$\text{(2-2)} \qquad \frac{d}{d x_i} \left\{ f_i \frac{d Q_i(x_i)}{d x_i} \right\} - g_i Q_i(x_i) = 0$$

donde las g_i son funciones que verifican

$$\sum F_i(x_1, \ldots, \check{x}_i \ldots x_n) g_i \equiv 0.$$

Nosotros aplicaremos este método al operador laplaciano en el espacio euclídeo

$$\text{(2-3)} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Considerando coordenadas cilíndricas

$$[x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z]$$

buscaremos en primer lugar la expresión $\nabla^2 \psi = 0$, y lo resolveremos por el método de variables separadas; al realizar el cambio de variables observamos que $\psi \in C^1$, lo que nos asegura la igualdad de las derivadas cruzadas.

Llegamos a determinar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

mediante los sistemas [1] y [2].

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\\
\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\\
\frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} [1] \equiv$$

$$\equiv \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\cos\varphi\,\frac{\partial y}{\partial \psi} + \operatorname{sen}\varphi\\
\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot - r\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cos\varphi\, r
\end{aligned}\right.$$

que nos permiten conocer

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(r, \varphi), \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(r, \varphi)$$

despejando en [1]; y

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial x}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\theta\\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi\,\partial r} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} r\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial x}(r\cos^2\varphi - r\operatorname{sen}^2\varphi) +\\
&\quad + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} r\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cos\varphi\\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} r^2\operatorname{sen}^2\varphi - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial x} r^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} r^2\cos\varphi -\\
&\quad - \frac{\partial \psi}{\partial x} r\cos\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial y}\operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}\right\} [2]$$

obteniendo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

Por lo que $\nabla^2 \psi = 0$, admite la expresión

$$\textbf{(2-4)} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

ecuación que expresamos

$$(2\text{-}5)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)+r\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}=0;$$

lo que nos permite conocer las funciones

$$f_1(r)=r,\ f_2=(\varphi)=1, f_3(z)=1;\ F_1(\varphi, z)=1, F_2(r,z)=\frac{1}{r},\ F_3(r,\varphi)=r.$$

Al considerar las soluciones de la forma

$$\psi = R(r).\ \Phi(\varphi).\ Z(z)$$

método de separación de variables, la ecuación (2-4) se expresa

$$\Phi(\varphi)Z(z)\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\Phi(\varphi)Z(z)\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}R(r)Z(z)\frac{d^2\Phi}{\partial\varphi^2}+$$
$$R(r)\Phi(\varphi)\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

o

$$(2\text{-}6)\qquad \frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

La obtención de funciones $g_1(r)$, $g_2(\varphi)$, $g_3(z)$, que hacen

$$F_1(\varphi,z)g_1(r)+F_2(r,z)\cdot g_2(\varphi)+F_3(r,\varphi)g_3(z)\equiv 0$$

esto es que verifican

$$1\,g_1(r)+\frac{1}{r}g_2(\varphi)+r_3g_3(z)\equiv 0;$$

lo que implica que $g_2(\varphi)$ y $g_3(z)$ son constantes, y para la elección

$$g_2(\varphi)=-n^2,\ g_3(z)=m^2,$$

tenemos

$$g_1(r)=-m^2r+\frac{n^2}{r}$$

y por tanto la resolución de (2-6) es equivalente a la resolución de las tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\text{(2-7 a)}\qquad \frac{d}{dr}\left\{ r\frac{dR}{dr}\right\} - (n^2/r - m^2 r)\, R = 0$$

$$\text{2-7 b)}\qquad \frac{d}{d\varphi}\left\{ \frac{d\Phi}{d\varphi}\right\} - n^2\,\Phi = 0$$

$$\text{(2-7 c)}\qquad \frac{d}{dz}\left\{ \frac{dZ}{dz}\right\} - m^2\, Z = 0$$

La ecuación (2-7a), que se puede expresar

$$\text{(2-8 a)}\qquad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0$$

coincide con la ecuación de Bessel de orden n, (1-1), y sus soluciones son las funciones de Bessel.

Tanto la (2-7b) como la (2-7c) generan otras funciones especiales, al ser sus soluciones respectivas las funciones circulares y la función exponencial.

3. Las funciones de Bessel y la teoría de representación de grupos

El tercer camino aprovecha la propiedad de que todo operador diferencial está caracterizado por una propiedad de invariancia, así el laplaciano es invariante frente a los desplazamientos del plano euclídeo, por lo que éstos caracterizan las funciones de Bessel; esta propiedad de invariancia nos va a permitir determinar las funciones propias de los operadores diferenciales, en términos de la teoría de la representación de grupos.

Si consideramos el plano afín euclídeo, con una referencia cartesiana rectangular, el grupo M_2 es el grupo de las transformaciones de dicho espacio, y está constituido por las traslaciones y rotaciones alrededor de un punto cualquiera, movimientos que dejan las distancias invariantes y no cambian la orientación de todo el plano a la vez. Tanto el giro como la traslación se pueden expresar por medio de matrices, que determinan las coordenadas transformadas en función de las originales;

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\Phi & \operatorname{sen} 2\Phi \\ \operatorname{sen} 2\Phi & -\cos 2\Phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

que se pueden expresar en forma conjunta

$$\text{(3-1)}\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < a, b < \infty;\ 0 \leq \theta < 2\pi,$$

donde θ —ángulo de rotación— es un parámetro continuo, que determina el subgrupo de las rotaciones de M_2 (SO_2), que es un grupo de Lie compacto y conexo; mientras Φ —ángulo de la recta de reflexión con el eje OX— es un parámetro discreto, con valores ± 1.

Nosotros emplearemos para $g(a, b; \theta)$, la expresión

$$\text{(3-2)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ b & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de una transformación afín; y como cada desplazamiento g determina una sola matriz del tipo (3-2), este conjunto de matrices: M_a, es una realización de M_2 (existe una aplicación D de M_2 en M_a); y dado que el producto de desplazamientos (composición de aplicaciones) es otro desplazamiento que verifica

$$D(g_1 \cdot g_2) = D(g_1) \cdot D(g_2),$$

y que además D es inyectiva, nos asegura que D es una representación exacta de M_2.

Dado que

$$g(a, b; \theta) = g_1(a_1, b_1; \theta_1) \cdot g_2(a_2, b_2; \theta_2),$$

podemos expresar los parámetros de g, en función de los de g_1 y g_2, pues

$$D(g) = D(g_1) \cdot D(g_2) \quad (\cdot \text{ producto de matrices}).$$

(3-3)

$$D(g_1) \cdot (D(g_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 + a_2\cos\theta_1 - b_2\operatorname{sen}\theta_1 & \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ b_1 + a_2\operatorname{sen}\theta_1 + b_2\cos\theta_1 & \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\text{(3-4)} \qquad \begin{aligned} a &= a_1 + a_2\cos\theta_1 - b_2\operatorname{sen}\theta_1 \\ b &= b_1 + a_2\operatorname{sen}\theta_1 + b_2\cos\theta_1 \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned}$$

que justifican de nuevo la unicidad de $g_1 \cdot g_2$, y que podemos expresar de la forma

$$g_1(a_1, b_1, \theta_1) \cdot g_2(a_2, b_2, \theta_2) = g[(a_1, b_1) + R_{\theta_1}(a_2, b_2); \theta_1 + \theta_2]$$

donde R_θ (a_2, b_2) es la rotación de ángulo θ_1, actuando sobre (a_2, b_2) considerado como vector.

El que todo desplazamiento $g(a, b; \theta)$ se pueda obtener como «producto» de tres desplazamientos particulares

$$g(a, b, \theta) = g(0, 0, \varphi)\, g(r, 0, 0)\, g(0, 0, \theta\ \varphi)$$

$g(0, 0; \theta - \varphi)$ es una rotación alrededor del origen de amplitud $\theta - \varphi$, $g(r, 0; 0)$ una traslación a lo largo del eje OX, de amplitud r, y $g(0, 0; \varphi)$ una rotación alrededor del origen de ángulo φ; con

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{arc tag}\, \frac{b}{a}$$

esto es, el desplazamiento $g(a, b; \theta)$ se expresa como

$$g(r, \varphi, \theta) \quad 0 < r < \infty; \quad 0 \leq \varphi, \theta < 2\pi$$

con la única consideración de emplear coordenadas polares, para el punto

$$(a, b)\,[a = r \cos \varphi, \quad b = r \operatorname{sen} \varphi],$$

que presenta la ventaja de que todo elemento de M_2 se obtiene como producto de tres elementos pertenecientes a subgrupos uniparamétricos.

Dado que estamos interesados en las representaciones de M_2, y que éstas las obtendremos a través de las de su álgebra de Lie $L(M_2)$, por medio de la aplicación exponencial, necesitamos hacer las siguientes consideraciones:

Definición 3.1; Miller [1], *operador infinitesimal.*—Sea $g(t)$ un subgrupo uniparamétrico del grupo de Lie G, y $T(g)$ una representación, sobre un espacio H de Hilbert, si existe el límite en el sentido de la norma de H,

$$(3\text{-}5) \qquad A = \lim_{t \to 0} \frac{T(e^{ta} - I)}{t} \equiv \lim_{t \to 0} \frac{T(g(t)) - I}{t} \equiv \left. \frac{d\, T g(t)}{d t} \right|_{t=0}$$

entonces se dice que A es el operador infinitesimal de la representación $T(g)$, asociado al subgrupo uniparamétrico $g(t)$.

Propiedad 3.1.—Al considerar

$$e^{At} = 1 + t\, A + \frac{t^2 A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n A^n}{n!} + \ldots$$

vemos

$$\left. \frac{d\, e^{At}}{d t} \right|_{t=0} = A$$

que al comparar con (3-5), por la unicidad de solución, nos asegura que $T(g)$ coincide con e^{tA}, siendo A el operador infinitesimal; observamos por tanto que con A y la función exponencial obtenemos elementos de la representación del grupo G.

Si G no es compacto, el límite (3-5) puede no existir para todo vector

$f \in H$, y A no estar bien definido como un operador lineal sobre H; sin embargo, si existe un subespacio D de H, que verifique:

Teorema 3.1; Miller [1].—Sea D un subespacio denso de H, verificando:

i) $D \in D_a$, $\forall a \in L(G)$, siendo $D_a = \{ f \in H$ para los que existe el límite (3-5) $\}$.
ii) D es invariante bajo todos los operadores $T(g)$.
iii) D es invariante bajo todos los operadores A.
iv) Para cada $f \in D$, el vector $T(g)f$ es una función analítica sobre G.

Entonces el operador infinitesimal A determina una representación del álgebra de Lie L (G), en términos de operadores infinitesimales sobre H.

Propiedad 3.2; Hegalson [2].—Para cada representación unitaria de un grupo de Lie G, existe un subespacio D, que verifica el teorema 3.1.

El grupo M_2 es un grupo matricial de Lie y compacto, para el que toda representación reducible es completamente reducible, y toda representación irreducible es equivalente a una representación unitaria (Boya-Pedraza [3]), siendo además grupo lineal de Lie.

Definición 3.2.—Se dice que un grupo matricial es un grupo lineal de Lie, si existe un entorno de la matriz unidad en este grupo, homeomorfo con la bola unidad.

Definición 3.3.—Matriz infinitesimal o matriz tangente, correspondiente a un subgrupo uniparamétrico $g(t)$, de un grupo matricial de Lie, es la matriz

$$a = \left. \frac{d\, g(t)}{d\, t} \right|_{t=0}$$

Propiedad 3.3; Vilenkin [4].—En los grupos lineales de Lie, la familia de las matrices tangentes sobre los subgrupos uniparamétricos forman un espacio vectorial, en el que si dos matrices a, b cualesquiera pertenecen a él también pertenece su conmutador $a\,b - b\,a = [a, b]$, determinando el álgebra matricial de Lie correspondiente al grupo lineal de Lie.

Propiedad 3.4; Vilenkin.—Dada la representación $T(g)$ del grupo G, esta representación define la representación infinitesimal $a \longrightarrow A$ del álgebra de Lie asociada L (G).

Pasando a nuestro grupo M_2, vamos a calcular los operadores infinitesimales a través de las matrices infinitesimales; el conocimiento de los tres subgrupos uniparamétricos de M_2, caracterizados por matrices de la forma

$$w_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad w_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad w_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

nos permiten obtener las matrices tangentes a_i, $i = 1, 2, 3$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que verifican las relaciones de conmutación

$$[a_1, a_2] = 0, \quad [a_2, a_3] = a_1, \quad [a_3, a_1] = a_2$$

Necesitamos ahora definir representaciones de M_2, y de éstas las representaciones irreducibles (r. i.), para lo que necesitamos conocer el espacio de la representación; al ser M_2 el grupo de las transformaciones del plano euclídeo π, y SO_2 el subgrupo continuo de las rotaciones, que al no actuar transitivamente sobre π, nos lleva a pensar en un espacio de funciones definido sobre un espacio homogéneo para el grupo de los desplazamientos M_2; siendo el más sencillo la esfera S_1, definimos el espacio de funciones sobre ella

(3-6) $\quad D = \} f(x)$ que son infinitamente diferenciables para $\forall\, x \in S_1 \{$

El espacio D verifica las condiciones del teorema 3.1, siendo H el espacio de Hilbert complejo constituido por todas las funciones

$$f(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad \text{mod } 2\pi,$$

tal que

$$\int_0^{2\pi} |f(\alpha)|^2 \, d\alpha < \infty$$

con el producto escalar

$$(3\text{-}7) \qquad (f, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha)\, \overline{h(\alpha)}\, d\alpha : f,\ h \in H,$$

Espacio de Hilbert conocido, y para el que las funciones

$$e^{im\alpha}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \ldots$$

forman una base ortogonal.

El que D verifique las condiciones del teorema 3.1, por la propiedad 3.2, sabemos que existe al menos una representación unitaria, que admite a D por subespacio de H, y en la que los operadores infinitesimales determinan los T (g) sobre H para todo $g \in G$, por ser G un grupo matricial.

Definición 3.4.—Sea el subespacio D (3-6), para $R \neq 0$, $R \in \mathbb{C}$, definimos para

$$g(a_1, b_1; \theta_1), \quad \text{y} \quad x = (x_1, x_2),$$

la aplicación T_R

$$T_{R(g)} f(x) = e^{R(a_1 x_1 + b_1 x_2)} f x_{-\theta_1} \equiv e^{R r \cos(\psi - \varphi)} f(\psi - \theta),$$
$$x = r \cos \varphi, \; y = r \operatorname{sen} \varphi.$$

donde x_{θ_1} es el transformado de (x_1, x_2) por la rotación $-\theta_1$.

Propiedad 3.5.—El operador T_R es una representación de M_2.

$$[T_R(g_1) \cdot T_R(g_2)] f(x) = T_R(g_2) [e^{R(a_1 x_1 + b_1 x_2)} f(x_{-\theta_1}) =$$
$$e^{R(a_1 x_1 + b_1 x_2)} T_R(g_2) f(x_1 \cos(-\theta_1) - x_2 \operatorname{sen}(-\theta_1), x_1 \operatorname{sen}(-\theta_1) + x_2 \cos(-\theta_1) =$$
$$= e^{R(a_1 x_1 + b_1 x_2)} e^{R(a_2(x_1 \cos\theta_1 + x_2 \operatorname{sen}\theta_1) + b_2(x_2 \cos\theta_1 - x_1 \operatorname{sen}\theta_1))}] \cdot f(x_{-(\theta_1 + \theta_2)} =$$
$$= e^{R(a_1 + a_2 \cos\theta_1 - b_2 \operatorname{sen}\theta_1) x_1 + (b_2 + a_2 \operatorname{sen}\theta_1 + b_2 \cos\theta_1) x_2} \cdot$$
$$\cdot f(x_{-(\theta_1 + \theta_2)}) = T_R(g_1 \cdot g_2) \cdot f(x)$$

Propiedad 3.6.—La representación T_R, relativa al producto escalar de H, es unitaria cuando R es imaginario puro.

$$\langle T_R(g) f, T_R(g\; h\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{R(a_1 x_1 + b_1 x_2)} f(x_{-\theta})\, e^{R(a_1 x_1 + b_1 x_2)} h(x_{-\theta})\, d\theta$$

que sólo si

$$R = \rho i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_{-\theta}) \overline{h(x_{-\theta})}\, d\theta = \langle f, h \rangle$$

Teorema 3.2; Vilenkin [4].—Sea $\{T_\alpha(g); \alpha \in A\}$ un sistema completo de r. i. unitarias, no equivalentes dos a dos, de un grupo compacto G, entonces el conjunto de funciones

$$\sqrt{d_\alpha}\; t^\alpha_{ij}(g), \quad 1 \leq i, j \leq d_\alpha, \alpha \in A$$

(d_α dimensión de la representación T_α) forman un sistema ortogonal completo sobre el grupo G, relativo a la medida invariante normada de G.

Este teorema justifica la necesidad de un sistema completo de r. i. de M_2, que al ser compacto (toda representación reducible es completamente reducible; y toda r. i. es equivalente a una representación unitaria), se obtiene con las r. i. unitarias.

Propiedad 3.7.—La representación T_R es irreducible. Buscaremos el subespacio maximal L de H que sea invariante para todo $T_R(g)$; observo en primer lugar que si L es invariante para todo $T_R(g)$, lo es para los elementos del subgrupo uniparamétrico SO_2, para el que conocemos que las $e^{in\alpha}$ para cada n son subespacios de dimensión 1 invariantes, lo que se comprueba en nuestro caso por

$$(3\text{-}8) \qquad T_R(w_3\,\theta)\,a_n\,e^{in\psi} = a_n\,e^{in(\psi-\theta)} = \frac{a_n}{e^{in\theta}}\,e^{in\psi};$$

pero el L maximal debe verificar el ser invariante para todo $T_R(g)$, lo que se verifica cuando L es invariante para los operadores infinitesimales, que calculamos a continuación.

Los operadores infinitesimales correspondientes a la representación $T_R(g)$, asociados a los subgrupos uniparamétricos, se determinan en correspondencia con las matrices infinitesimales

$$a_i \longrightarrow A_i = \frac{d}{dt}\,T_R\,[w_i(t)]\,f(x)\,|_{t=0}$$

por tanto A_1

$$A_1\,f(x) = \frac{d}{dt}\,e^{R(t\,x_1+0\,x_2)}f(x-0)\,|_{t=0} = R\,x_1\,e^{R\,t\,x_1}f(x)\,|_{t=0} =$$
$$= R\,x_1 f(x), \quad \text{luego} \quad A_1 = R\,x_1$$

haciendo $x_1 = \cos\varphi$ en la 2.ª parametrización $A_1 = R\cos\varphi$.

El cálculo de A_2

$$A_2 f(x) = \frac{d}{dt}\,e^{R(0\,x_1+t\,x_2)}f(x-0)\,|_{t=0} = R\,x_2\,f(x) \quad \text{luego} \quad A_2 = R\,x_2$$

en la 2.ª parametrización $A_2 = R\,\text{sen}\,\varphi$.

Cálculo de A_3

$$A_3 f(x) = \frac{d}{dt}\,T_R\,[w_3(t)]\,f(x)\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,e^{R(0\,x_1+0\,x_2)}\,f(x-t)\,|_{t=0} =$$
$$= -\frac{d}{dt}\,f(x) \quad \text{luego} \quad A_3 = -\frac{d}{dt}$$

en 2.ª parametrización $A_3 = -\dfrac{d}{d\varphi}$.

Al observar la actuación de A_1 sobre las funciones $e^{in\alpha}$

$$A_1\,e^{in\psi} = R\cos\varphi\,e^{in\psi}; \qquad (e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$$

con $\varphi = \pi$ vemos que el subespacio generado por $e^{in\alpha}$ no es invariante aunque es otro elemento de

$$H\,(H = \bigoplus H_k) \quad \text{con} \quad H_k = \}e^{ik\alpha}\{\,).$$

No obstante mediante la aplicación repetida de las combinaciones

$$(A_1 + i\,A_2) \quad y, \quad (A_1 - i\,A_2)$$

a las funciones $e^{in\alpha}$ vemos que si L contiene una función $e^{ik\alpha}$, L las contiene a todas $(-\infty < k < \infty)$.

En efecto

$$(A_1 + i\,A_2)\,e^{in\psi} = R\,e^{in\psi}[\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\,\psi] = e^{i(n+1)\psi}.$$

y al menos contiene una $e^{ki\psi}$ por ser las $e^{in\psi}$ todas las r. i. de SO_2.

Por lo tanto para R complejo $R \neq 0$, el subespacio maximal, que puede ser el generado por todas las funciones $e^{ik\alpha}$, que coincide con nuestro H de partida, por lo que $T_R(g)$, no admite ningún subespacio de H invariante, luego es irreducible.

Cuando $R = 0$

$$T_0(g)f(x) = e^{0(a_1 x_1 + b_1 x_2)} f(x_{-a}) = f(x - a)$$

que es precisamente la representación regular de SO_2, que es totalmente reducible, como dijimos antes, y al ser los subespacios invariantes cada espacio de funciones generado por $\{e^{in\alpha}\}$

$$T_0(g) = \bigoplus T_{0n}(g), \quad \text{con} \quad T_{0n}(g) = e^{in\alpha}$$

Se prueba Vilenkin, Thoma [6], que así tenemos todas las representaciones irreducibles de M_2, y nos encontramos en situación de obtener los elementos matriciales de las representaciones, y más aún de obtener con éstos un sistema ortonormal completo de funciones que me permite el estudio del desarrollo armónico de toda función definida sobre M_2.

Conocido es, que dada una representación $T(g)$, y cuando conozcamos una base ortonormal en el espacio de la representación, los elementos matriciales se obtienen por

$$t_{ij}(g) = \langle T(g)\,e_j,\, e_i \rangle$$

En nuestro caso para la representación $T_R(g)$

$$t^R_{m,n}(g) = \langle T_R(g)\,e^{in\psi}, e^{im\psi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Rr\cos(\psi-\varphi)}\, e^{in(\psi-\theta)}\, \overline{e^{im\psi}}\, d\psi =$$

$$= \frac{e^{-in\theta}}{2\pi} \int_0^{2} e^{Rr\cos(\psi-\varphi)}\, e^{i(n-m)\psi}\, d\psi$$

particularizando para $r = 0$, $\varphi = 0$; es decir, cuando g es un giro de ángulo θ tenemos

$$t^{R}_{m,n}(\theta) = \frac{e^{-in\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}\, d\varphi = \frac{e^{in\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\psi} e^{-im\psi}\, d\varphi$$

y por la ortogonalidad de

$$e^{in\psi}, e^{im\psi}; \quad t^{R}_{m,n}(\theta) = e^{-in\theta}\,\delta_{n,m}$$

luego a una rotación le corresponde $T_R(\theta)$, que es una matriz diagonal de elementos $e^{-in\theta}$.

Con un tratamiento idéntico, para

$$\theta = \theta,\ r = 0,\ t^{R}_{n,m}(\varphi) = e^{-in\varphi}\,\delta_{n,m}$$

y a $T_R(\varphi)$ le corresponden matrices diagonales de elementos $e^{-in\varphi}$.

Si $\varphi = \theta = 0$, cuando g es una traslación a lo largo del eje OX

$$t^{R}_{m,n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Rr\cos\psi}\, e^{i(n-m)}\, d\psi$$

que con el cambio $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, se expresa

$$t^{R}_{m,n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Rr\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} e^{Ri(n-m)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\, d\alpha =$$

$$= -\frac{i^{n-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Rr\,\mathrm{sen}\,\theta}\, e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \frac{i^{n-m}}{2\pi} \int_C e^{Rr\,\mathrm{sen}\,\theta - i(n-m)\theta}\, d\theta$$

y por (1-3)

$$\left[J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\,\mathrm{sen}\,\theta - in\theta}\, d\theta \right]$$

tenemos que

$$t^{R}_{m,n}(r) = i^{n-m} J_{n-m}(-iRr)$$

que nos asegura la obtención de las funciones de Bessel, como elementos matriciales de las r. i. de M_2.

Conviene notar que cuando R es imaginario puro, $R = \rho i$, es cuando obtenemos las representaciones unitarias, y es en este caso

$$t^{\rho i}_{m,n}(r) = i^{n-m} e^{-i[n\theta - (m-n)\varphi]} J_{n-m}(\rho r)$$

cuando los elementos matriciales se expresan en términos de funciones de Bessel de argumento real; y más, estas funciones de Bessel de argumento real, son el sistema ortogonal completo que asegura el teorema 3.2, y que sirve para el estudio del desarrollo armónico de las funciones definidas sobre M_2.

BIBLIOGRAFIA

1. MILLER, W.: *Lie Theory and Special Functions*. Academic Press, 1968.
2. HEGALSON, S.: *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1962.
3. BOYA, L. J. y PEDRAZA, J.: *Estudio de los invariantes en las álgebras de Lie simples compactas*. «Revista Matemática Hispano-Americana», Madrid, 1975.
4. VILENKIN, N.: *Fonctions Spéciales et Théorie de la Representation des Groupes*, Dunod, 1969.
5. THOMA, E.: *Die unitären Darstellungen der universellen Überlagerungsgruppe der Bewegungsgruppe des R^2*. «Math. An.», 134, 1958.