ESTABILIDAD DE UNA BOTELLA

por

TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN y JESÚS AMADO MOYA
Catedráticos de Matemáticas y Física y Química, respectivamente, del I. N. B. «P. Moret» de Pamplona

Presentamos el presente trabajo como ejemplo de colaboración a nivel interdisciplinar. Aun cuando el problema aquí abordado tuvo su origen en una clase de Física, la resolución del mismo tuvo que plantearse en términos matemáticos de nivel superior al que pueda poseer el alumno medio de nuestros Centros de Bachillerato. Tras la resolución teórica del problema, se acudió de nuevo al entorno de la Física para llevar a cabo la experimentación y confirmación de resultados en el laboratorio.

El problema aquí planteado surgió en una clase de Física-COU al preguntar un alumno en qué condiciones era máxima la estabilidad de una botella, si en el momento en que estaba totalmente llena de líquido o cuando estaba con líquido hasta la mitad de su contenido.

Una primera solución del problema sería calcular la altura h de líquido que se debe introducir en la botella para que el centro de gravedad (c. d. g.) G del conjunto (botella-líquido) se encuentre lo más bajo posible.

Suponemos la botella de forma cilíndrica y radio R, estando situado su centro de gravedad G_1 a una altura H; sea P el peso de la botella. Por otra parte, suponemos que el líquido posee un peso específico ρ, y si la altura del mismo es h, su c. d. g. G_2 estará situado a la altura $h/2$. Las figuras 1, 2 y 3 ejemplifican lo indicado.

La altura z_G del c. d. g. G del conjunto vendrá dada por la ecuación

$$P(H - z_G) = \pi R^2 \rho h (z_G - 0{,}5 \cdot h)$$

resultante de la igualación de los momentos de las fuerzas peso de la botella y peso del líquido con respecto al c. d. g. total G. Resulta así que

$$(1) \qquad z_G = \frac{P \cdot H + 0{,}5 \cdot \pi R^2 \rho h^2}{P + \pi R^2 \rho h}$$

La altura h de líquido que debe contener la botella para que el valor de

z_G sea mínimo se calculará mediante la anulación de la primera derivada $d\,z_G/d\,h = 0$, lo cual nos conduce a la solución

$$h = \frac{(P^2 + 2\pi R^2 \rho P H)^{1/2} - P}{\pi R^2 \rho}$$

valor para el que sitúa el c. d. g. G a la altura

$$z_G = \frac{P^2 + 2\pi R^2 \rho P H - P(P^2 + 2\pi R^2 \rho P H)^{1/2}}{\pi R^2 \rho (P^2 + 2\pi R^2 \rho P H)^{1/2}}$$

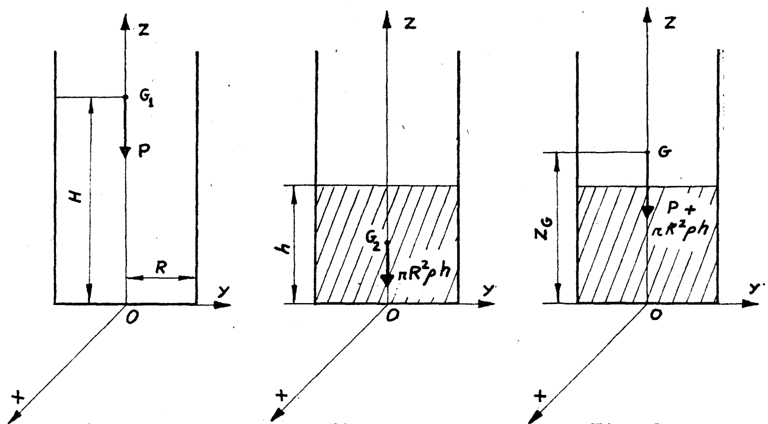

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Esta solución, en principio, no agota el problema, ya que el líquido no constituye un sólido rígido y por tanto, a medida que se va inclinando la botella, el c. d. g. G del conjunto queda afectado como consecuencia de la nueva conformación del volumen líquido, ya que éste mantendrá constantemente horizontal su superficie libre.

Vamos, así pues, a recoger este comportamiento real del líquido tratando de resolver ahora el problema de la estabilidad de la botella bajo este enunciado concreto: Deducir la cantidad de líquido que debemos introducir en la botella de forma que podamos girarla el mayor ángulo posible sin que ésta se vuelque. La posición de equilibrio límite se conseguirá cuando la vertical del c. d. g. total G pase por el punto de apoyo de la base de la botella.

Refiriéndonos a partir de ahora a la figura 4, que recoge simultáneamente la botella cilíndrica en posiciones vertical e inclinada, observamos que la ecuación del cilindro girado referida al sistema de coordenadas

$$\}0, e'_1, e'_2, e'_3\{ \quad \text{es} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

El plano que contiene al origen y es perpendicular al eje O Z′ es $z = 0$; y el plano paralelo al plano O X Y que tiene por ecuación

$$y \cdot \cos\alpha - z \cdot \operatorname{sen}\alpha + t = 0$$

coincide con la superficie superior del líquido cuando el cilindro ha girado un ángulo α con eje de rotación O X.

Gráficamente se observa que $t = h \cdot \operatorname{sen} \alpha$, y las anteriores ecuaciones en coordenadas cilíndricas adquieren la forma:

Primer plano: $z = 0$.
Segundo plano: $z = \rho \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \gamma + t/\operatorname{sen} \alpha$.
Ecuación del cilindro: $\rho = R$.

Procedamos a continuación al cálculo del c. d. g. del líquido referido a $\{0, e'_1, e'_2, e'_3\}$. Si llamamos V al volumen de líquido, se verificará que

$$V\, Y'_L = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^R d\rho \int_0^{(\rho \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\gamma + t)/\operatorname{sen}\alpha} \rho \cdot \rho \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot dz$$

ecuación cuya resolución nos proporciona la coordenada Y'_L del s. d. g. del líquido, resultando ser:

$$Y'_L = \frac{R^2 \cdot \cos\alpha}{4 \cdot h \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

De forma análoga se verificará que

$$V \cdot Z'_L = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^R d\rho \int_0^{(\rho \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\alpha + t)/\operatorname{sen}\alpha} \rho \cdot z \cdot dz$$

con lo cual se deduce que

$$Z'_L = \frac{R^2 \cdot \cos^2\alpha}{8h \cdot \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{h}{2}$$

Naturalmente, la tercera coordenada es $X'_L = 0$.

Hallemos a continuación las coordenadas de este c. d. g. respecto del sistema de referencia $\{0, e_1, e_2, e_3\}$ en función del ángulo α. Tales coordenadas vendrán dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} X_L &= X'_L \\ Y_L &= Y'_L \cdot \operatorname{sen}\alpha + Z'_L \cdot \cos\alpha \\ Z_L &= Z'_L \cdot \operatorname{sen}\alpha - Y'_L \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Tras la resolución de estas ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} X_L &= 0. \\ Y_L &= \frac{R^2 \cdot \cos\alpha}{4\ h} + \frac{R^2 \cdot \cos^3\alpha}{8h \cdot \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{h \cdot \cos\alpha}{2} \\ Z_L &= \frac{h \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{R^2 \cdot \cos^2\alpha}{8h \cdot \operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}$$

Si llamamos (X_B, Y_B, Z_B) a las coordenadas del c. d. g. de la botella vacía, las coordenadas (X_G, Y_G, Z_G) del c. d. g. total del conjunto botella + líquido vendrán dadas por las expresiones:

$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{\pi R^2 \rho h \cdot Y_L + P \cdot Y_B}{P + \pi R^2 \rho h}$$

$$Z_G = \frac{\pi R^2 \rho h \cdot Z_L + P \cdot Z_B}{P + \pi R^2 \rho h}$$

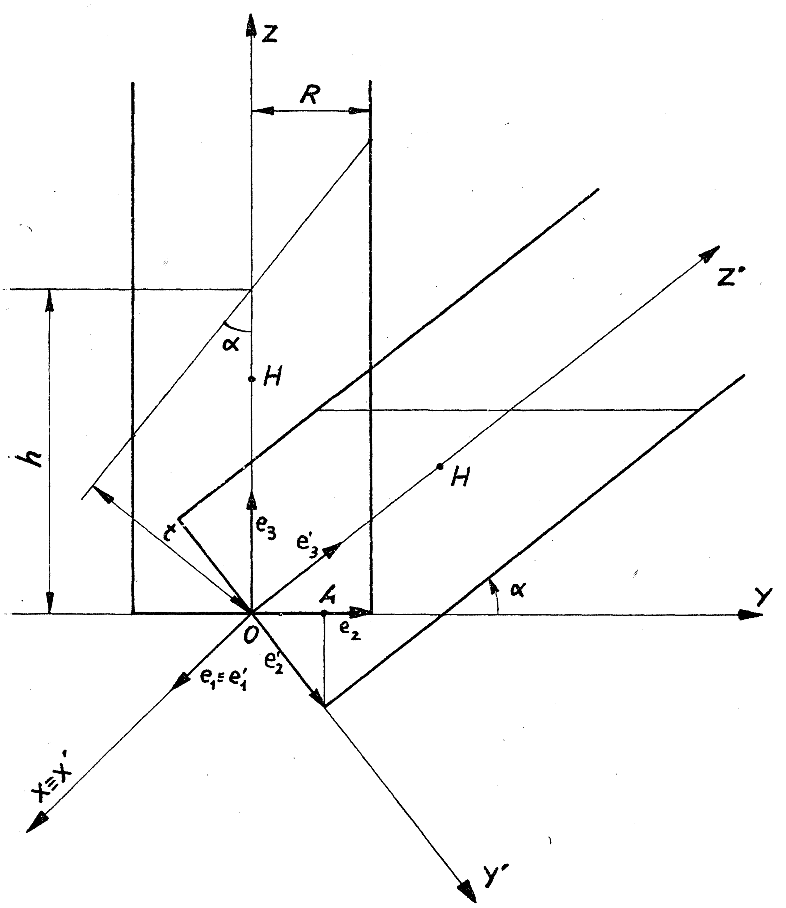

Fig. 4

deducidas mediante anulación del momento de las fuerzas-peso de la botella y del líquido con respecto al c. d. g. total del conjunto.

Sustituyendo en las expresiones anteriores Y_L y Z_L por sus valores conocidos, y sabiendo que $Y_B = H \cdot \cos\alpha$ y que $Z_B = H \cdot \operatorname{sen}\alpha$, deducimos finalmente que:

$$(2)\quad X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{(\pi R^4 \rho \cos\alpha)/4 + (\pi R^4 \rho \cos^3\alpha)/8 \operatorname{sen}^2\alpha + (\pi R^2 \rho h^2 \cos\alpha)/2 + P H \cos\alpha}{P + \pi R^2 \rho h}$$

$$Z_G = \frac{(\pi R^2 \rho h^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha)/2 - (\pi R^4 \rho h \cdot \cos^2\alpha)/8 h \cdot \operatorname{sen}\alpha + P H \cdot \operatorname{sen}\alpha}{P + \pi R^2 \rho h}$$

Teniendo ahora presente que la posición límite de equilibrio se localiza cuando $Y_G = O A = R \cdot \operatorname{sen}\alpha$, obtenemos finalmente la ecuación:

$$\frac{2\pi R^4 \rho \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\pi R^4 \rho \cdot \cos^3\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha} + \frac{4\pi R^2 \rho h^2 \cdot \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{8 P H \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} -$$
$$- 8 R (P + \pi R^2 \rho h) = 0$$

expresión que utilizaremos posteriormente bajo el número (3), o $f(\alpha, h) = 0$.

Dado que el problema planteado consiste en averiguar qué cantidad de líquido se debe introducir para que la botella se pueda inclinar el máximo posible, la solución se logrará para el valor de h que haga mínimo a α en la ecuación de equilibrio (3). Tal valor se halla resolviendo el sistema

$$f(\alpha, h) = 0; \quad f_h(\alpha, h) = 0.$$

Derivando la ecuación (3) respecto de h obtenemos que

$$(4)\qquad h = R \cdot tg\,\alpha$$

Por otra parte, resulta que es

$$f_\alpha(\alpha, h) = \frac{-2\pi P^4 \rho}{\operatorname{sen}^2\alpha} - \frac{3\pi R^4 \rho \cdot ctg^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} - \frac{4\pi R^2 \rho h^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} - \frac{8 P H}{\operatorname{sen}^2\alpha}\ \text{(negativo)}.$$

En el caso en que

$$f(\alpha, h) = 0; \quad f_h(\alpha, h) = 0$$

será

$$\alpha'' = \frac{-f_{h^2}(\alpha, h)}{f_\alpha(\alpha, h)}$$

cociente mayor que cero y que implica que el valor α_L solución del sistema

$$f(\alpha, h) = 0; \quad f_h(\alpha, h) = 0$$

es mínimo.

Sustituyendo, pues, en (3) la variable h por su equivalente $R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ aquella ecuación se transforma en la siguiente:

$$2 \pi R^4 \rho\, ctg^2 \alpha + \pi R^4 \rho\, ctg^4 \alpha + 8 P H\, ctg^2 \alpha - 8 P R\, ctg \alpha - 4 \pi R^4 \rho = 0$$

Si hacemos el cambio de variable $\operatorname{ctg} \alpha = s$, podemos expresar la ecuación anterior en la forma más simple:

$$s^4 + \left(2 + \frac{8 P H}{\pi R^4 \rho}\right) s^2 - \frac{8 P}{\pi R^3 \rho} s - 4 = 0 \tag{5}$$

o su equivalente (sabiendo que $s = R/h$)

$$h^4 + \frac{2 P}{\pi R^2 \rho} h^3 - \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2 P H}{\pi R^2 \rho}\right) h^2 - \frac{R^4}{4} = 0. \tag{6}$$

Llegados a este estadio, el problema planteado se reduce a calcular las raíces reales de la ecuación (5) o de la (6), proporcionando: la primera el ángulo límite α_L, y la segunda la altura h_L de líquido para obtener tal equilibrio límite.

Aun cuando ya Ferrari (1522-1565) descubrió un método para resolver una ecuación general de 4.° grado, resulta de más comodidad y rapidez la deducción de las raíces mediante cálculos aproximados, utilizando por ejemplo el método de Sturm. Tengamos en cuenta que solamente nos interesan aquellas soluciones que sitúan el ángulo α en el primer cuadrante, dando una altura h de líquido positiva.

De esta forma hemos calculado matemáticamente las soluciones de los siguientes casos, habiendo comprobado experimentalmente el último de ellos.

Caso 1.°)

$$P = 2; \quad H = 1; \quad R = 1; \quad \rho = 3/4.$$

Resultó ser

$$s = 1{,}064; \quad \alpha_L = 43{,}2239^\circ; \quad h = 0{,}9398.$$

Caso 2.°)

$$P = 2; \quad H = 1; \quad R = 1; \quad \rho = 13{,}6.$$

Resultó ser

$$s = 1{,}108; \quad \alpha_L = 42{,}0645^\circ; \quad h_L = 0{,}9024.$$

Caso 3.°)

$$P = 2; \quad H = 1; \quad R = 1/2; \quad \rho = 4/3.$$

Resultó ser

$$s = 0{,}5886; \quad \alpha_L = 59{,}5189^\circ; \quad h_L = 0{,}8494.$$

Caso 4.º)

$$P = 237, \quad H = 12{,}5; \quad R = 2{,}5; \quad \rho = 1.$$

Todas estas medidas poseen como unidades las correspondientes en el sistema cegesimal. Obtuvimos como resultado:

$$s = 0{,}2729; \quad \alpha_L = 74{,}7335^\circ; \quad h_L = 9{,}1592.$$

La elevada influencia de la variable R en el equilibrio queda de manifiesto sin más que observar cómo en la ecuación (5) aparece ésta afectada con exponentes hasta de 4.º grado, y los restantes parámetros en grado 1.

Finalmente, y como última y definitiva aproximación a la realidad, planteamos el problema de la estabilidad máxima de la botella desde el punto de vista energético, a saber, el cálculo de la cantidad de líquido que debe poseer la botella para que el trabajo preciso para llevarla a su posición de equilibrio límite α_L sea máximo. Como tal trabajo equivale a la variación de energía potencial entre la posición vertical ($\alpha = \pi/2$) y la posición límite ($\alpha = \alpha_L$), basta con estudiar tal función ΔE_p.

Para ello, y ateniéndonos a la figura 5, vamos a considerar como nuevo sistema de referencia el

$$\{0'', e_1'', e_2'', e_3''\}$$

ya que es $0''$ el punto alrededor del cual gira realmente la botella. Como solamente nos interesa la coordenada Z''_G obtenemos ésta fácilmente ya que

$$Z''_G = Z_G + R \cdot \cos \alpha_L$$

con lo cual, recordando la expresión (2), hallamos:

$$Z''_G = \frac{(\pi R^2 \rho h^2 \operatorname{sen} \alpha)/2 - (\pi R^4 \rho \cdot \cos^2 \alpha)/8 \cdot \operatorname{sen} \alpha + P H \operatorname{sen} \alpha}{P + \pi R^2 \rho h} + R \cdot \cos \alpha$$

El valor de Z''_G para la posición vertical ($\alpha = \pi/2$) coincidirá con (1).

La variación de energía potencial entre las dos posiciones antes indicadas será

$$\Delta E_p = (P + \pi R^2 \rho h) [Z''_G(\alpha_L) - Z''_G(\pi/2)]$$

Dado que entre h y α_L existe la relación (3), no resulta fácil el cálculo teórico de la derivada $d\,(\Delta\, E_p)/d\,h$, cuya anulación conduciría a la solución definitiva del problema.

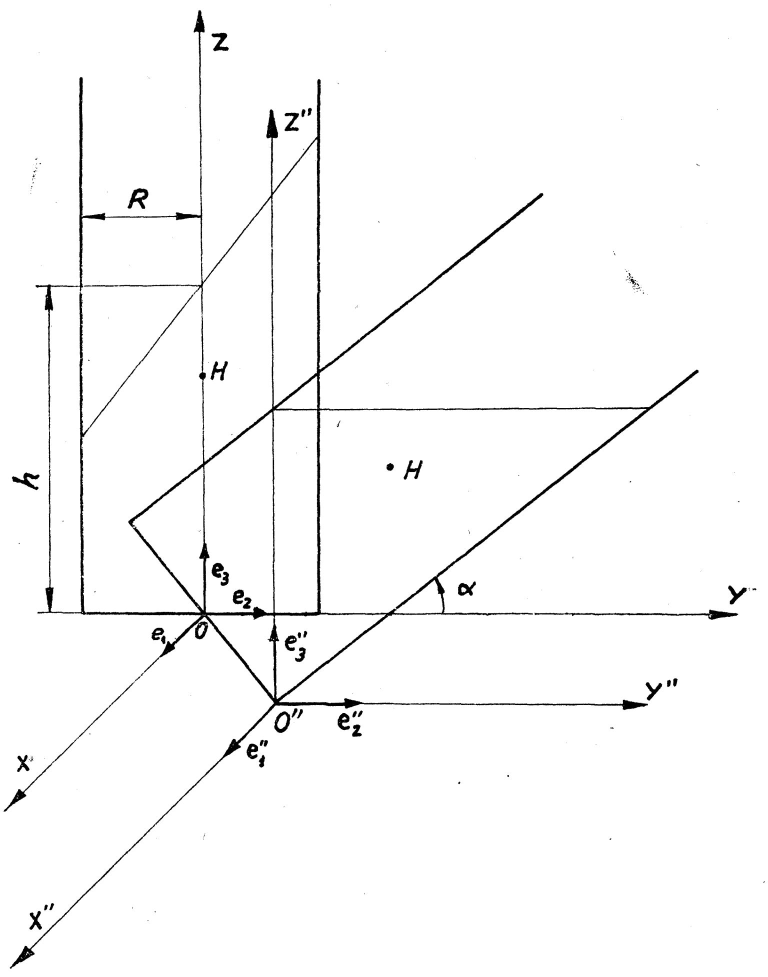

Fig. 5

No obstante, para el cilindro empleado en nuestra experimentación práctica (caso 4.º antes citado) la resolución por métodos de aproximación nos ha mostrado que la máxima variación de energía potencial se consigue para un valor de $h_L = 26{,}12$ notablemente mayor que el hallado en la resolución estática del problema ($h = 9{,}1592$).

El valor del ángulo límite obtenido para esta resolución dinámica o energética del problema es de $\alpha_L = 79{,}05^o$, que no difiere en gran cuantía del valor $\alpha_L = 74{,}7335^o$ encontrado en la resolución estática del problema.

Hemos de indicar que la altura del líquido $h_L = 26{,}12$ corresponde prácticamente con la altura total del cilindro utilizado.

Pamplona, 12 de enero de 1980.