TRANSFORMACIONES QUE CONSERVAN EL AREA

por

AMELIA GUIVERNAU

En esta nota pretendemos determinar las transformaciones que conservan el área en el espacio de tres dimensiones, así como las cuestiones análogas en espacios de dimensión superior.

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar ordinario consideramos una transformación lineal T dada en forma matricial por la matriz $(t_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq 3}$ respecto de la base canónica:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

Es decir

$$\begin{array}{l} T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \end{array} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos cuándo T conserva la longitud, el área, o el volumen, es decir, qué debe de cumplir T para que se satisfagan cada una de estas condiciones:

$$\begin{array}{lll} (A_1) & \| T x \| = \| x \| & \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ (A_2) & S(Tx, Ty) = S(x, y) & \text{para todos} \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \\ (A_3) & V(Tx, Tv, Tz) = V(x, v, z) & \text{para todos} \quad x, y, z \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

donde $\| x \|$ designa la norma euclídea (o longitud) del vector x, $S(x, y)$ es el área del paralelogramo subtendido por x e y

$$S(x, y) = \text{Area}\,(\{\lambda x + \mu y \mid 0 \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq \mu \leq 1\})$$

y $V(x, y, z)$ representa el volumen del paralelepípedo subtendido por x, y, z.

La primera y última cuestión tienen respuestas bien conocidas (v. [2]):

(A_1) equivale a que T sea ortogonal : $T^* T = I$
(A_3) equivale a que $\det(T) = \det(t_{ij}) = \pm 1$

donde T^* es la transformación adjunta de T, dada por la matriz $(t_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq 3}$ transpuesta de la de T.

La condición (A_3) es considerablemente más débil que (A_1) y cabría esperar que (A_2) fuese una condición estrictamente contenida entre ambas. Sin embargo, se tiene:

Teorema 1.—*La condición necesaria y suficiente para que T conserve el área (es decir, que se cumpla (A_2)) es que sea ortogonal: $T^* T = I$.*

Demostración.—Suficiencia: Designemos por $x \cdot y$ el producto escalar en $\mathbb{R}^3$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

de forma que $S(x, y)$ viene dada por la raíz cuadrada del determinante de Gram

$$S(x, y) = \begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ y \cdot x & y \cdot y \end{vmatrix}^{1/2} = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2}$$

Si T es ortogonal, $Tx \cdot Ty = x \cdot y$, luego evidentemente es

$$S(Tx, Ty) = S(x, y).$$

Necesidad: Supongamos que existe un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|Tx\| > \|x\|$. Sea M el subespacio bidimensional ortogonal al vector $T^* T x$, y sea $\{y, z\}$ una base ortogonal de M. Entonces

$$y \perp T^* T x \Rightarrow 0 = (T^* T x) \cdot Ty = Tx \cdot Ty$$
$$\|Tx\| \; \|Ty\| = S(Tx, Ty) = S(x, y) \leq \|x\| \; \|y\| < \|Tx\| \; \|y\|$$

Por tanto, $\|Ty\| < \|y\|$, e igualmente se ve que $\|Tz\| < \|z\|$. Pero y, z son ortogonales, luego

$$S(Ty, TZ) \leq \|Ty\| \; \|Tz\| < \|y\| \; \|z\| = S(y, z)$$

lo que va contra la hipótesis de conservación del área. Así hemos probado, por reducción al absurdo, que

$$(1) \qquad \|Tx\| \leq \|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Si T conserva el área, es obvio que $\ker(T) = \{0\}$, luego T es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$, y además, también T^{-1} conserva el área. Por tanto

$$(2) \qquad \|T^{-1} y\| \leq \|y\| \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^3$$

Aplicando (2) con $y = \mathrm{T}\,x$ se obtiene la desigualdad opuesta a (1), luego $\| \mathrm{T}\,x \| = \| x \|$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ lo que, según hemos visto, equivale a que T sea ortogonal, q. e. d.

Nota.—Es fácil ver que la condición (A_2) de conservación del área es equivalente a la siguiente:

$$(\mathrm{A}'_2) \quad \text{Area}\,(\mathrm{T}\,(\mathrm{P})) = \text{Arsa}\,(\mathrm{F})$$

para todo polígono plano P (o incluso para todo conjunto plano medible). En efecto, todo polígono puede descomponerse en triángulos, y el área del triángulo subtendido por los vectores x, y es precisamente $\mathrm{S}\,(x, y)/2$.

* * *

Para transformaciones lineales T en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, podemos considerar n condiciones como las anteriores. Para $k = 1, 2, \ldots, n$ la condición de conservación del volumen k-dimensional es

$$(\mathrm{A}_k) \quad \mathrm{S}_k\,(\mathrm{T}\,x_1, \mathrm{T}\,x_2, \ldots, \mathrm{T}\,x_k) = \mathrm{S}_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_k$$

para todos los vectores

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \in$$

donde

$$\mathrm{S}_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_k$$

representa el volumen k-dimensional del conjunto

$$\}\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k \mid 0 \leq \lambda_1 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1, \ldots, 0 \leq \lambda_k \leq 1\{$$

(que es el paralelepípedo k-dimensional subtendido por $x_1, x_2, \ldots, x_k$) y viene dado por la raíz cuadrada del determinante de Gram

$$\mathrm{S}_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \{\det\,((x_i \cdot x_j)_{1 \leq i, j \leq k})\}^{1/2}$$

(véase [2]). Estas condiciones están caracterizadas únicamente para los casos extremos $k = 1$, $k = n$:

(A_1) equivale a que T sea ortogonal : $\mathrm{T}^*\,\mathrm{T} = \mathrm{I}$
(A_n) equivale a que $\det\,(\mathrm{T}) = \pm 1$

(véase [2]). El resultado que corresponde al del teorema I para este caso general es:

Teorema II.—*Las condiciones (A_1), (A_2), ..., (A_{n-1}) son equivalentes, y se verifican si y sólo si T es ortogonal.*

Demostración.—Sea $1 < k < n$. Que toda transformación ortogonal verifica (A_k) se prueba como en el teorema I. Si T verifica (A_k), probaremos que

$$\| T x \| \leq \| x \| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

y el resto de la demostración es como en el teorema anterior. Supongamos, por reducción al absurdo, que para algún vector $x \in \mathbb{R}^n$ es $\| T x \| > \| x \|$. Sea M el subespacio ortogonal a $T^* T x$. Entonces

$$(3) \qquad T x \perp T y \quad \text{para todo} \quad y \in M$$

Dados

$$y_1, y_2, \ldots, y_{k-1} \in M,$$

linealmente independientes, se tiene por (3) que $T x$ es ortogonal al paralelepípedo $(k-1)$-dimensional subtendido por

$$T y_1 \, T y_2, \ldots, T y_{k-1}$$

luego

$$\begin{aligned} S_{k-1}(T y_1, T y_2, \ldots, T y_{k-1}) \| T x \| &= S_k (T y_1, T y_2, \ldots, T y_{k-1}, T x = \\ &= S_k (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x) \leq S_{k-1} (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) \| x \| < \\ &< S_{k-1} (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) \| T x \| \end{aligned}$$

Así hemos probado lo siguiente:

$$(4) \qquad \begin{array}{l} S_{k-1}(T y_1, T y_2, \ldots, T y_{k-1}) < S_{k-1} (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) \\ \text{para todos} \quad y_1, y_2, \ldots, y_{k-1} \in M \quad \text{lim. indeptes.} \end{array}$$

Como $\dim (M) = n - 1 \geqslant k$, dado $y \in M$, $y \neq 0$, podemos encontrar vectores $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1} \in M$ linealmente independientes y ortogonales al vector y. Entonces, en virtud de (4),

$$\begin{aligned} \| y \| S_{k-1} (T y_1, T y_2, \ldots, T y_{k-1}) &< \| y \| S_{k-1} (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) = \\ &= S_k (y, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) = S_k \cdot (T y, T y_1, T y_2, \ldots, T y_{k-1}) \leq \\ &\leq \| T y \| S_{k-1} (T y_1, T y_2, \ldots, T y_{k-1}) \end{aligned}$$

Es decir,

$$(5) \qquad \| T y \| > \| y \| \quad \text{para todo} \quad y \in M, y \neq 0$$

Como T es un isomorfismo,

$$\dim (T (M)) = \dim (M) \geq k,$$

luego podemos elegir vectores

$$z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathrm{T}(\mathrm{M}),$$

no nulos y ortogonales dos a dos. Sean

$$z_i = \mathrm{T} y_i \quad \text{con} \quad y_i \in \mathrm{M} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Entonces

$$\mathrm{S}_k(\mathrm{T} y_1, \mathrm{T} y_2, \ldots, \mathrm{T} y_k) = \| \mathrm{T} y_1 \| \; \| \mathrm{T} y_2 \| \ldots \| \mathrm{T} y_k \| > \\ > \| y_1 \| \; \| y_2 \| \ldots \| y_k \| \geq \mathrm{S}_k(y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

lo que contradice la hipótesis (A_k), q. e. d.

Nota.—El problema considerado aquí ha sido estudiado en espacios de dimensión infinita por E. Corbacho en su tesis ([1]), pero el método utilizado allí es menos preciso, ya que para $\mathbb{R}^n$ sólo permite probar la implicación $(\mathrm{A}_k) \Rightarrow (\mathrm{A}_1)$ cuando $n \geqslant 4k - 3$ (en particular, el teorema I sólo podría probarse con dicho método $\mathbb{R}^5$ o espacios de dimensión superior).

BIBLIOGRAFIA

[1] Corbacho, E.: *Hipervolúmenes, su convergencia y sumabilidad en los operadores lineales acotados del espacio de Hilbert.* Tesis doctoral. Zaragoza, 1978.

[2] Fleming, W. H.: *Functions of Several Variables.* Addison-Wesley (1965).