ALGUNAS DESIGUALDADES OBTENIDAS A PARTIR DE LA DESIGUALDAD DE BERNOULLI

por

J. B. ROMERO MÁRQUEZ y M.ª ANGELES LÓPEZ SÁNCHEZ-MORENO

1. INTRODUCCIÓN.

Admitimos conocida la desigualdad de Bernoulli, que viene demostrada en [1], pág. 34, y a partir de ella vamos a enunciar nuevas desigualdades que probaremos.

Prop. 1.1. (Desigualdad de Bernoulli).— $\forall\ x \in (-1, \infty)$ y $\forall\ n \in \mathbf{N}$ se tiene $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

2. CONSECUENCIAS.

Prop. 2.1.— $\forall\ n \in \mathbf{N}$ se tiene

a)
$$\binom{n+2}{2} \leqslant 2^{n+1} - 1$$

b)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{2} < 2^{n+2}$$

c)
$$\prod_{k=0}^{n} \binom{k+2}{2} < F_{n+1}$$

donde $F_{n+1} = 1 + 2^{2^{n+1}}$ el $n + 1$ -ésimo número de Fermat.

Demostración.

a) Se sigue de la desigualdad de Bernoulli, integrada entre 0 y 1. Esto es:

$$\int_0^1 (1 + nx)\, dx \leqslant \int_0^1 (1 + x)^n\, dx \Rightarrow \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \leqslant 2^{n+1} - 1 \Rightarrow \binom{n+2}{2} \leqslant 2^{n+1} - 1 .$$

b) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+2}{2} \underset{\text{Por } a)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}-1) = \sum_{k=0}^{n}2^{k+1} - (n+1) =$$

$$= 2^{n+2} - 2 - n - 1 < 2(2^{n+1}-1) < 2^{n+2}$$

c) $$\prod_{k=0}^{n}\binom{k+2}{2} \underset{\text{Por a)}}{\leqslant} \prod_{k=0}^{n}(2^{k+1}-1) < \prod_{k=0}^{n}2^{k+1} = 2^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} =$$

$$= 2^{\binom{n+2}{2}} \underset{\text{Por a)}}{\leqslant} 2^{2^{n+1}-1} < 2^{2^{n+1}} = F_{n+1} - 1 < F_n$$

donde

$$F_{n+1} = 1 + 2^{2^{n+1}}$$

Prop. 2.2.—$\forall\, n \in \mathbf{N}\; n \geqslant 0 \Longrightarrow n! \leqslant 2^{\frac{n^2}{2}}$

Demostración.—Aplicar integración a la desigualdad de Bernoulli entre 0 y 2 se prueba que $2(1 + n) < 3^{n+1}$.

Dando valores a esta desigualdad desde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ se tiene después de diversas acotaciones que:

$$2^n\,(n!)^2 < 3^{\frac{n(n+1)}{2}} < 4^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n(n+1)} \Longrightarrow (n!)^2 <$$

$$< \frac{2^{n(n+1)}}{2^n} = 2^{n^2} \Longrightarrow n! < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

Otra forma de probarlo es haciendo en la desigualdad de Bernoulli $x = 1 \Longrightarrow$

$$1 + n \leqslant 2^n$$

Dando a n valores desde 0 a n—1 y multiplicando miembro a miembro

$$\Longrightarrow n! \leqslant 2^{\frac{n(n-1)}{2}} < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

de aquí la cota anterior puede mejorarse, tomando

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

como cota de $n!$ y esto nos permitirá relacionarlo con cierta desigualdad obtenida en [1], pág. 193, 3.1.1.9.

Prop. 2.3.—Si $p > 1$, $p \in \mathbf{R}$ y $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 2^{-(p-1)} \leqslant$ $\leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$.

Demostración.—Consideramos la función $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^p +$ $+ (1 - x)^p$ que es continua y ya que $p > 1$ es por lo menos una vez diferenciable.

Derivando tenemos: $f'(x) = p\, x^{(p-1)} - p(1 - x)^{(p-1)}$. Para obtener los ceros de

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ahora $\forall\, x \in (0, 1)$ f es infinitamente diferenciable. Entonces

$$\forall\, x \in (0, 1),\ f''(x) = p(p - 1)\,(x^{p-2} + (1 - x)^{p-2})$$

y

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

f alcanza su mínimo absoluto que es

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$$

Así, tenemos probado que

$$\forall\, x \in [0, 1],\ \frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \qquad [1]$$

Ahora como $\forall\, p > 1$ y $\forall\, x \in [0, 1]$, $x^p \leqslant x$ y $(1 - x)^p \leqslant 1 - x \Rightarrow$ $\Rightarrow x^p + (1 - x)^p \leqslant x + (1 - x) = 1 \Rightarrow x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$ [2] y de [1] y [2] se tiene

$$\forall\, p > 1, \forall\, x \in [0, 1] \Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$$

NOTA.—Ver [1], pág. 276, 3.6.25.

Corolario 2.4.—$\forall\, p \geqslant 1,\ p \in \mathbf{R} \Rightarrow \dfrac{1}{2^p} \leqslant \dfrac{1}{p + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

Demostración.—Basta integrar la desigualdad de la prop. 2.3 entre 0 y 1.

Corolario 2.5.—$\forall\, n \geqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$ se tiene $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Demostración.—Se obtiene del corolario 2.4 dando a p los valores $1, 2, \ldots, n - 1$ y multiplicando miembro a miembro se obtiene el resultado:

BIBLIOGRAFIA

[1] *Analytic Inequalities*, MITRINÖVIC.