SOBRE EL PRODUCTO ESCALAR

por

ANTONIO MOLANO ROMERO

En el tomo XXXI, núms. 3 y 4, de la *Gaceta Matemática*, se publicó un artículo de Víct r Arenzana Hernández y Pedro Buera Pérez, donde se intenta abstraer, de una idea geométrica en el plano, la definición de producto escalar en R^2. En la página 70, del citado artículo, se dice:

«Definición 1.2:

Definimos producto escalar como una aplicación:

$$R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

Que cumpla:

i) Conmuntativa o simétrica $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$.

ii) Bilineal

$(\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{w} = \overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{v} \cdot \overline{w}$ (distributiva respecto a la suma).

$t(\overline{u} \cdot \overline{v}) = (t\overline{u}) \cdot \overline{v} = \overline{u} \cdot (t\overline{v})$ $t \in R$.

iii) $\overline{u} \cdot \overline{u} \geqslant 0 \quad \overline{u} \in R^2$.»

Es evidente que la condición ii), en su primera parte, es solamente la linealidad a izquierda respecto a la suma; la bilinealidad, tal como se indica en la propiedad, es una consecuencia inmediata de la conmutatividad y de la linealidad a izquierda que, a mi entender, debería haberse indicado antes de decir que es bilineal.

Pero el error más importante que se comete, al aceptar esta definición de producto escalar, es la condición iii). Aceptando esta definición de producto escalar, en la página 73 se dice como consecuencia de ella:

«2.4. *Definición*

Llamamos norma del vector $\overline{a}$ y la representamos por $||\overline{a}||$ a la expresión

$$||\overline{a}|| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$$

De esta definición pueden deducirse las siguientes propiedades:

a) $||\overline{a}|| \geqslant 0 \quad \forall\, \overline{a}.$
b) $||\overline{a}|| = 0 \Longleftrightarrow \overline{a} = \overline{0}.$

La segunda propiedad no es cierta si aceptamos la definición de producto escalar que se da en el artículo. Para verlo, daremos el siguiente contraejemplo:

Consideremos la aplicación de

$$R^2 \times R^2 \longrightarrow R$$
$$(\overline{u}. \;, \overline{v}) \longrightarrow \overline{u}.\,\overline{v}$$

De modo que si $\overline{u} = (a, b)$ y $\overline{v} = (c, d)$ $\overline{u} \cdot \overline{v} = a \,.\, C.$

Esta aplicación cumple las propiedades i), ii), iii), como veremos a continuación, y por tanto es un producto escalar según el artículo.

Propiedad i)

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = a \cdot c$$
$$\overline{v} \cdot \overline{u} = c \cdot a$$

Por tanto, $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$ en virtud de la conmutatividad del producto de números reales.

Propiedad ii)

$$\overline{u} = (a, b) \qquad \overline{v} = (c, d) \qquad \overline{w} = (e, f)$$

entonces:

$$(\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{w} = (a + c)\, e = ae + ce = \overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{v} \cdot \overline{w} \qquad \text{c.q.d.}$$

Propiedad iii)

$$\overline{u} \cdot \overline{u} = a^2 \geqslant 0 \qquad \forall\, \overline{u} \in R^2$$

Con este producto escalar, la norma de un vector sería:

$$||\overline{u}|| = \sqrt{a^2} = |a| \text{ siendo } \overline{u} = (a, b)$$

Por tanto, la primera propiedad de la norma se verifica, pues

$$|a| \geqslant 0 \qquad \forall\, a \in R$$

La segunda propiedad de la norma era:

$$||\overline{u}|| = 0 \Longleftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$$

Con la norma definida a través de este producto escalar, esta propiedad no se verifica, pues tomando, por ejemplo, el vector $\overline{u} = (0, 3)$, que es no nulo, su norma es 0.

De esta apreciación podemos deducir que la condición iii), que define el producto escalar, no es correcta y debe definirse el producto escalar en R^2 de la siguiente manera:

Definición:

Se llama producto escalar en R^2 a toda aplicación de

$$R^2 \times R^2 \longrightarrow R$$

que cumpla las siguientes propiedades:

I) $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in R^2 \quad \overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}.$

II) Distributiva a derecha respecto a la suma:

$$(\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{w} = \overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{v} \cdot \overline{w} \qquad \forall\ \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in R^2$$

III) $\overline{u} \cdot (t\overline{v}) = t(\overline{u} \cdot \overline{v}) \quad \forall\ t \in R \quad \forall\ \overline{u}, \overline{v} \in R^2.$

IV) $\forall\ \overline{u} \neq \overline{0} \quad \overline{u} \cdot \overline{u} > 0.$

De las condiciones II) y III), junto con la conmutatividad del producto escalar, se deducen la linealidad respecto a la suma y respecto al producto de escalar por vector.

Con estas consideraciones, el producto escalar es una forma bilineal, simétrica, definida positiva y no degenerada.

La propiedad b) de la norma

$$||\overline{a}|| = 0 \Longleftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$$

se demostrará: $\Longleftarrow$ $\forall\ \overline{a} \in R^2$ se verifica $\overline{a} \cdot \overline{0} = 0$. En efecto: $\overline{a} \cdot \overline{0} + 0 = \overline{a} \cdot \overline{0}$. Por otra parte: $\overline{a} \cdot \overline{0} = \overline{a} \cdot (\overline{0} + \overline{0}) = \overline{a} \cdot \overline{0} + \overline{a} \cdot \overline{0}$, por tanto: $\overline{a}/ \cdot \overline{0} + 0 = \overline{a}/ \cdot \overline{0} + \overline{a} \cdot \overline{0}$. Por ser la suma de números reales un grupo aditivo y todo elemento en un grupo es regular o simplificable, se deduce: $\overline{a} \cdot \overline{0} = 0$.

Con este resultado $||\overline{a}|| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{\overline{0} \cdot \overline{0}} = \sqrt{\overline{0}} = 0$.

$\Longleftarrow$ Supongamos $\overline{a} \neq \overline{0} \quad \overline{a} \cdot \overline{a} > 0$ por la propiedad IV, entonces $||\overline{a}|| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} \neq 0$, es decir, $||\overline{a}|| = 0$.