TRIANGULOS ARITMETICOS

por

MANUEL DÍAZ REGUEIRO

INTRODUCCION

Los coeficientes de los polinomios del tipo $(x—x_1)\ (x—x_2)\ \ldots\ (x—x_n)$ se deducen de los del tipo $(x+x_1)\ (x+x_2)\ \ldots\ (x+x_n)$ sin más que cambiar alternadamente el signo de los coeficientes, comenzando por mantener el siglo de x^n, cambiar el de x^{n-1}, etc. Ejemplo: si el primer polinomio tiene de coeficientes 1, —3, 2, 4, —1, el segundo tiene 1, 3, 2, —4, —1.

UN PRIMER TRIÁNGULO.

Construimos el triángulo

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 2 & & & \\
1 & 6 & 11 & 6 & & \\
1 & 10 & 35 & 50 & 24 & \\
1 & 15 & 85 & 225 & 274 & 120 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

de la siguiente forma: por ejemplo, la quinta fila comienza por 1, entre 1 y 10 colocamos $15=1{\cdot}5+10$. Entre 10 y 35 ponemos $85=10{\cdot}5+35$; los siguientes son $225=35{\cdot}5+50$, $274=50{\cdot}5+24$, $120=24{\cdot}5$.

En general, en una fila m pondremos primero 1 y después, debajo de dos números x,y (de la fila $m—1$), escribiremos el número $xm+y$.

Notación.—Llamaremos (m/n) al número que aparece en el triángulo en la fila m, y en ésta, está en el lugar $n+1$.

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO.

Probaremos que:

$$\sum_{n=0}^{m} (m/n) = (m+1)! \qquad [1]$$

$(m+1)(m/n) + (m/n+1) = (m+1/n+1)$, por construcción

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n (m/n) = 0 \qquad [2]$$

$$(m-1/n) = \sum \frac{m!}{a!\, b!\, c! \ldots 1^a 2^b 3^c \ldots} \qquad \begin{array}{r} a+b+c\ldots = m-n \\ a+2b+3c+\ldots = m \end{array}$$

Aplicaciones.

Los números de la fila m son los coeficientes del polinomio $(x+1)(x+2)\ldots(x+m)$. Esto demuestra la propiedad [1] haciendo $x=1$. Y la propiedad [2], sustituyendo en el polinomio $x=-1$. También si en esa fila cambiamos alternadamente los signos, tenemos los coeficientes de $(x-1)(x-2)\ldots(x-m)$. O bien del factorial generalizado $X^{(m+1} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)$, si añadimos un 0 como último coeficiente, que se utiliza en la interpolación de Newton. Por último, los elementos de una fila de ese triángulo son los coeficientes del producto de n términos de una progresión aritmética, $P=(a_1+d)(a_1+2d)\ldots(a_1+nd)$.

EN GENERAL.

Notación.—Definamos, dadas las n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, el polinomio simétrico fundamental de orden i, $S_{ni} = x_1 \cdot x_2 \ldots x_i + \ldots\ldots + x_{n-i+1} \cdot x_{n-i+2} \ldots x_n$.

Construimos ahora el triángulo

$$\begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & & & \\ 1 & x_1+x_2 & x_1 \cdot x_2 & & \\ 1 & x_1+x_2+x_3 & x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, & x_1x_2x_3 & \\ 1 & x_1+x_2+x_3+x_4 \ldots & \ldots & \ldots & x_1x_2x_3x_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

siguiendo el esquema: el primer número de la fila i es 1, y bajo las expresiones x,y de la fila $i-1$ se escribe $x \cdot x_i + y$.

Probaremos ahora que cada fila i son los polinomios simétricos fundamentales de i variables. Por inducción (las primeras filas lo son), supongamos que tengamos

$$1 \quad S_{k1} \quad S_{k2} \quad S_{k3} \quad S_{k4} \quad \ldots\ldots \quad S_{kk}$$

en la fila k, en la $k+1$ tenemos

$$1 \quad x_{k+1}+S_{k1},\ x_{k+1}S_{k1}+S_{k2} \ldots x_{k+1}S_{k3}+S_{k4} \ldots x_{k+1}S_{kk}$$

tenemos que probar que

$$S_{k+1,1} = x_{k+1}+S_{k1} \ ; \ S_{k+1,i} = x_{k+1}S_{k,i-1}+S_{ki} \ ; \ S_{k+1,k+1} = x_{k+1}S_{kk}$$

o cual no es más que un fácil ejercicio.

Estos triángulos permiten calcular de un modo automático los polinomios simétricos fundamentales para valores concretos. Y, por tanto, calcular cualquier polinomio de raíces conocidas de una manera rápida, lo cual es muy útil en interpolación y, en general, en la clase de Matemáticas.

El triángulo de Pascal es un caso particular de estos triángulos, donde cada fila n da los coeficientes de $(x+1)^n$.

Ejemplo: Cálculo del polinomio de raíces —1, 2, 3, —5

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & -1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & -2 & & \\
 & 1 & & 4 & & 1 & & -6 & \\
1 & & -1 & & -19 & & -11 & & 30 \\
+ & & - & & + & & - & & +
\end{array}
$$

El polinomio es: $x^4+x^3-19x^2+11x+30$.

Segundo método: construir el triángulo para $-x_1$, $-x_2 \ldots -x_n$, nos da directamente los coeficientes del polinomio $(x+x_1)$ $(x-x_2) \ldots$ $\ldots (x-x_n)$; en el ejemplo anterior se haría el triángulo para 1, —2, —3, 5.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & -1 & & -2 & & \\
 & 1 & & -4 & & 1 & & 6 & \\
1 & & 1 & & -19 & & 11 & & 30
\end{array}
$$

Multiplicación por $x+a$.

Dado un polinomio $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n$ se multiplica por $x+a$ de la forma adoptada en los triángulos:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_n \\
a_0 & a \cdot a_0+a_1 & a\,a_1+a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_0 a_n
\end{array}
$$

Ejemplo: multiplicar $x+4$ por x^3-2x^2+5x-4

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & -2 & 5 & -4 \\
1 & 2 & -3 & 16 & -16
\end{array}
$$

da

$$x^4+2x^3-3x^2+16x-16$$

Es fácil deducir, también, un esquema para la multiplicación por $ax+b$.

INTERPOLACION

En cualquier método de cálculo del polinomio de interpolación hay que calcular polinomios de raíces conocidas. Por esto, la combinación del método de los triángulos aritméticos y de la regla de Ruffini, hará mucho más rápido los cálculos del polinomio de interpolación y de los valores de interpolación.

Ejemplo: Hallar el polinomio de interpolación por el método de Lagrange que pasa por los puntos (1,3), (3,1), (4,2), (2,1).

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 3 \\
1 & 8 & 19 & 12
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 3 \\
1 & 6 & 11 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 5 & 4 \\
1 & 7 & 14 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & \\
 & 1 & 5 & 6 \\
1 & 9 & 26 & 24
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -8 & 19 & -12 \\
 & & 2 & -12 & 14 \\
2 & & & & \\
\hline
 & 1 & -6 & 7 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
 & & 4 & -8 & 12 \\
4 & & & & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -7 & 14 & -8 \\
 & & 3 & -12 & 6 \\
3 & & & & \\
\hline
 & 1 & -4 & 2 & -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -9 & 26 & -24 \\
 & & 1 & -8 & 18 \\
1 & & & & \\
\hline
 & 1 & -8 & 18 & -6
\end{array}
$$

El polinomio es:

$$
y = \frac{1(x^3-8x^2+19x-12)}{2} + \frac{2(x^3-6x^2+11x-6)}{6} +
$$

$$
+ \frac{1(x^3-7x^2+14x-8)}{-2} + \frac{3(x^3-9x^2+26x-24)}{-6}
$$

BIBLIOGRAFIA

REY PASTOR: *Elementos de Análisis Algebraico.*