SUBCONJUNTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS INVARIANTES POR CIERTOS SUBGRUPOS DE $\overline{\Delta}$ (0, 1)

por

JUAN B. ROMERO MÁRQUEZ

1. Vamos a considerar conocidos los siguientes hechos algebraicos y topológicos acerca del grupo multiplicativo $\overline{\Delta}(0, 1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ y de ciertos subgrupos del mismo.

a) $\overline{\Delta}(0,1)$ es un grupo compacto, conexo.
b) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$, $R_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$ es un subgrupo finito cíclico, cerrado.
c) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $F = \{R_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una familia filtrante creciente y decreciente de subgrupos.
d) $R = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$ es un subgrupo $\overline{\Delta}$ (0, 1), denso, no cerrado, acotado y no conexo.

2. Nos planteamos encontrar subconjuntos de funciones complejas que sean invariantes en un cierto sentido, que precisaremos por subgrupos de $\overline{\Delta}$ (0, 1).

La generalización a varias variables, esto es, a funciones complejas de varias variables complejas, es de forma natural, como al final del trabajo indicaremos.

Definición 2.1.—Sea $F(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-álgebra de todas las funciones de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$. Sea $A \subseteq F(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ un subconjunto de funciones y dado $G \subseteq \overline{\Delta}(0, 1)$ subgrupo, diremos que A es G-invariante si $\forall\, f \in A$, $\forall x \in G$, $\forall z \in \mathbf{C}$, $f(z\, x) = f(z)$.

El problema que nos planteamos aquí es: dado un $G \subseteq \overline{\Delta}$ (0, 1) encontrar el subconjunto A más amplio de funciones que sea invariante por G.

Es inmediato la

Proposición 2.2.—Sea A_0 el conjunto de las funciones complejas constantes. Entonces $\forall$ $G \subseteq \overline{\Delta}$ (0, 1) subgrupo, la $\mathbf{C}$ álgebra A_0 es invariante.

Proposición 2.3.—$\forall n \in \mathbf{N}$ ($n \geqslant 1$) el $\mathbf{C}$-espacio vectorial $A_n = \{f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \mid f(z) = az^n + b,\ a,\ b \in \mathbf{C},\ a \neq 0\}$ es invariante por el subgrupo R_n de las raíces n-simas de la unidad.

Demostración: $\forall\ f \in A_n$, $\forall z \in \mathbf{C}$, $\forall z_k \in R_n$, $f(z_k\ z) = a(z_k\ z)^n + b = a\ z_k^n\ z^n + b = a\ z^n + b = f(z)$.

Corolario 2.4.—$\forall m \in \mathbf{N}$ ($m \geqslant 1$) $\forall n \in \mathbf{N}$ ($n \geqslant 1$) el conjunto de las funciones $A_n{}^m = A_n \cdot A_n \ldots A_n$ (m veces) como $\mathbf{C}$-espacio vectorial es invariante por R_n.

Corolario 2.5.—Sea

$$R_n = \left\{ f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \mid f(z) = \frac{a\ z^n + b}{c\ z^n + d},\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{C},\ a,\ c \neq 0,\ c \neq 1,\ d \neq -1 \right\}$$

es invariante por el subgrupo R_n, donde $n \in \mathbf{N}$ ($n \geqslant 1$). Más aún, $\forall\ m \in \mathbf{N}$ ($m \geqslant 1$), R_n^m es invariante por R_n anterior.

Proposición 2.6.—Si $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ y $g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es invariante por el subgrupo $G \subseteq \overline{\Delta}\,(0,\ 1)$, entonces $f \circ g$ es invariante por G.

Demostración: $\forall\ z \in \mathbf{C}$, $\forall x \in G$, $(f \circ g)\ (z\ x) = f(g(zx)) = f(g(z)) = (f \circ g)\ (z)$ y de aquí el resultado.

Proposición 2.7.—$\forall\ G \subseteq \overline{\Delta}\,(0,\ 1)$ subgrupo, sea $A(G) = \{f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \mid f$ es invariante por $G\}$, entonces A(G) es una subálgebra de la $\mathbf{C}$-álgebra $F(\mathbf{C},\ \mathbf{C})$.

Demostración: Es una mera comprobación.

Proposición 2.8.—Si $G \subseteq G' \subseteq \overline{\Delta}\,(0,\ 1)$ subgrupos, entonces $A(G') \subseteq A(G)$.

Demostración: $\forall\ f \in A(G') \Rightarrow f$ es invariante por $G' \Rightarrow$ como $G \subseteq G' \Rightarrow f$ es invariante por $G \Rightarrow f \in A(G)$.

3. Consideremos ahora los siguientes retículos:

a) $(L(\overline{\Delta}\,(0,\ 1)),\ \cdot,\ \cap)$ retículo de todos los subgrupos de $\overline{\Delta}\,(0,\ 1)$ y

b) $(L(F(\mathbf{C},\ \mathbf{C})),\ +,\ \cap)$, retículo de todos los $\mathbf{C}$-espacios vectoriales.

Definimos la correspondencia $B\colon L(\overline{\Delta}\,(0,\ 1)) \longrightarrow L(F(\mathbf{C},\ \mathbf{C}))$, así:

$$B(G) = A(G) = \{f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ es invariante por } G\}$$

PROPIEDADES.

1) B es aplicación, porque si $G = G' \Leftrightarrow \begin{array}{c} G \subseteq G' \\ \text{y} \\ G' \subseteq G \end{array}$ $\overset{\text{prop. 2.8}}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{prop. 2.8}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} A(G') \subseteq A(G) \\ \text{y} \\ A(G) \subseteq A(G') \end{array} \Leftrightarrow B(G) = B(G')$

2) Si $G = \overline{\Delta}\,(0,\ 1)$, entonces $B(G) = 0$ y si $G = \{1\}$, entonces $B(G) = F(\mathbf{C},\ \mathbf{C})$.

3) Si $G \subseteq G' \subseteq \overline{\Delta}(0,\ 1)$ subgrupos, $B(G') \subseteq B(G)$ por prop. 2.8.

4) $\forall\ G,\ G' \in L(\overline{\Delta}\,(0,\ 1))$, $B(G \cap G') = B(G) + B(G')$.

En efecto, como

$$\left.\begin{array}{l} G \cap G' \subseteq G \Rightarrow B(G) \subseteq B(G \cap G') \\ G \cap G' \subseteq G' \Rightarrow B(G') \subseteq B(G \cap G') \end{array}\right\} \Rightarrow B(G) + B(G') \subseteq B(G \cap G')$$

De otra parte, $\forall\, f \in B(G) + B(G'), f = f_1 + f_2, f_1 \in B(G)$ y $f_2 \in B(G')$.
Ahora, $\forall x \in G \cap G'$ y $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(zx) = f_1(zx) + f_2(zx) = f_1(z) + f_2(z) = (f_1 + f_2)(z)$, ya que $G \cap G' \subseteq G$ y $G \cap G' \subseteq G' \Rightarrow f \in B(G \cap G') \Rightarrow B(G) + B(G') \subseteq B(G \cap G')$.

De ambos contenidos se tiene la igualdad.

5) $\forall\, G, G' \in L(\overline{\Delta}(0, 1)), B(G\, G') = B(G) \cap B(G')$.

En efecto, como

$$\left.\begin{array}{c} G \subseteq G\, G' \\ \text{y} \\ G' \subseteq G\, G' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(G\, G') \subseteq B(G) \\ \\ B(G\, G') \subseteq B(G') \end{array}\right\} \Rightarrow B(G\, G') \subseteq B(G) \cap B(G')$$

De otra parte, sea $f \in B(G) \cap B(G') \Rightarrow f \in B(G)$ y $f \in B(G')$. Entonces $\forall\, y \in G\, G'$, $y = x\, x'$, $x \in G$, $x' \in G'$.

Entonces

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, f(z\, y) = f(z\, x\, x') \underset{\text{invariante por } G'}{\overset{f}{=}} f(z\, x) \underset{\text{invariante por } G}{\overset{f}{=}} f(z) \Rightarrow f \text{ es inva-}$$

riante por $G\, G' \Rightarrow f \in B(G\, G') \Rightarrow B(G) \cap B(G') \subseteq B(G\, G')$ y de ambas se tiene el resultado.

4. La generalización es obvia, tomando como G producto directo de G_i subgrupos de $\overline{\Delta}\,(0, 1)$ y el polidisco generalizado-unidad.