GENERALIZACION DE LOS CONCEPTOS DE SUMA E INTEGRAL A NIVEL DE AXIOMATICA DE GRUPO

por

JUAN-ESTEBAN PALOMAR TARANCÓN

I

Los conocidísimos conceptos de «integral», «derivada», «suma» y diferencia de funciones nos permiten determinar los resultados de sumas finitas o infinitas, continuas o discontinuas, de valores adquiridos por determinadas funciones, a partir de «un par de valores» extremos de otra función asociada.

Si

$$\sum_{n} = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n$$

es una de tales series, trataremos de obtener su generalización sustituyendo en ella las ocurrencias de los términos $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ por ocurrencias de elementos de un grupo arbitrario G; y las ocurrencias del símbolo $+$, por ocurrencias de la ley o composición interna del grupo considerado. De tal forma llegaremos a la síntesis de tales procedimientos de cálculo, entendiendo por síntesis a la función que reduce una pluralidad de procedimientos, estructuras o fórmulas a una unidad conceptual más amplia (que incluye a todos los elementos de la pluralidad dada), definida por una axiomática más general. En el presente artículo induciremos esta abstracción a nivel de axiomática de grupo. Para dicho fin empezaremos por construir el siguiente aparato «matemático-topológico-conjuntista»:

Partiremos de un conjunto de referencia A, cuya cardinalidad, $\# (A) = n$, podrá ser indistintamente finita o infinita.

En el conjunto de pares ordenados A^2, definiremos una relación de equivalencia «R» que satisfaga las siguientes condiciones:

1,1) Las clases de equivalencia $C = \{c_1, c_2 \ldots c_n\}$, determinadas por «$R$», son todas equipotentes entre sí y, a la vez, equipotentes con A, es decir,

$$\forall\, c_\sigma \in C : \# (c_\sigma) = \# (A) = n$$

1,2) Si $c_\sigma = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots (a_n, b_n)\}$ es una clase arbitraria de C, el conjunto P_1 de los elementos primeros de cada par contiene a cada uno y todos los elementos de A sin repetición, es decir:

$$P_1 = \{a_1, a_2 \ldots\} = A$$

De la misma manera, el conjunto P_2 de todos los elementos «segundos» de los pares de c_σ, también debe satisfacer dicha condición, luego:

$$P_2 = \{b_1, b_2 \ldots b_n\} = A$$

Una relación «*R*», que distribuye los elementos de A^2 en tal familia de clases, la calificaremos de «equivalencia canónica» y, de forma análoga, diremos que $c_1, c_2 \ldots c_n$ son «clases de equivalencia canónica».

Una sucesión de pares ordenados de A^2:

$$S_\mu = (a_{\mu_1}, b_{\mu_1})\,(a_{\mu_2}, b_{\mu_2}) \ldots (a_{\mu_n}\, b_{\mu_n})$$

diremos que es una sucesión normal si existe una ley de sucesión, de tal forma que si $(a_{\mu_\tau}, b_{\mu_\tau})$ es un elemento cualquiera de S_μ su consecutivo $(a_{\mu_{\tau+1}}, b_{\mu_{\tau+1}})$ deba satisfacer dicha ley. Tal ley de sucesión puede expresarse mediante una relación binaria «*P*», de tal forma que para que un par (a_μ, b_μ) pueda suceder a otro par (a_ν, b_ν) en S_μ sea condición necesaria.

$$(a_\nu, b_\nu) \text{ «}P\text{» } (a_\mu, b_\mu)$$

ELEMENTOS CONTIGUOS.

Si dos pares (a, b) y (c, d) de A^2 son tales que el primer elemento c de (c, d) es idéntico al segundo elemento b de (a, b), diremos que son contiguos, o mejor, que (c, d) es contiguo a la derecha de (a, b) y (a, b) contiguo a la izquierda de (c, d). Consiguientemente la contigüidad es una relación binaria. Representado mediante el símbolo «*P*», esta relación y tomándola como relación de sucesión o ley de sucesión, tendremos:

1,3) x e y son contiguos; luego: x «*P*» y

1,4) Si $S_\mu = (a_{\mu_1}, b_{\mu_1})\,(a_{\mu_2}, b_{\mu_2}) \ldots$ es una sucesión de elementos de A^2 tales que

$$(a_{\mu_1}, b_{\mu_1}) \text{ «}P\text{» } (a_{\mu_2}, b_{\mu_2}) \text{ «}P\text{» } \ldots (a_{\mu_n}, b_{\mu_n})$$

S_μ es una sucesión «normal».

REDUCCIÓN:

Llamaremos *reducción* a una Ley de composición interna sólo *parcialmente* definida en A^2 por las siguientes condiciones:

1,5) Si (a, b) y (c, d) son dos pares contiguos $(b = c)$ su reducción es el par construido con el primer elemento de (a, b) y el segundo de (c, d), cualesquiera que sean los b y c, es decir:

$$(a, b)\,(c, d) = (a, d) \text{ (con } b = c)$$

Donde la reducción se ha expresado con notación multiplicativa.

1,6) Si (a, b) y (c, d) no son contiguos su composición o reducción no es posible.

Estas dos condiciones las podemos expresar en lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$$1{,}5) \quad \forall\, (a, b), (c, d) \in A^2 : (a, b)\,(c, d) = \begin{cases} (a, d) \text{ si } b = c \\ \{\emptyset\} \text{ si } b \neq c \end{cases}$$

Lema número 1.—La composición o reducción de todos los elementos de una sucesión «normal» arbitraria es igual al par construido con los elementos extremos de la sucesión.

Demostración:

Supongamos que la sucesión dada es

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots (a_\mu, b_\mu)$$

Como por hipótesis, dicha sucesión es normal, todos los elementos deberán ser contiguos, cada uno con su consecutivo; por consiguiente, se supondrá que es

$$b_1 = a_2;\ b_2 = a_3 \ldots b_{\mu-1} = a_\mu$$

por ende, la composición o reducción de la sucesión es posible. Podemos demostrar, ahora, el presente lema por recurrencia sobre μ:

Supongamos que el lema es válido para $\mu = m$: Tendremos

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) \ldots (a_m, b_m) = (a_1, b_m)$$

Si efectuamos ahora la composición de este resultado con el par consecutivo de la serie, o sea, con (a_{m+1}, b_{m+1}), obtendremos

$$\begin{aligned} &(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) \ldots (a_m, b_m)\,(a_{m+1}, b_{m+1}) = \\ &= (a_1, b_m)\,(a_{m+1}, b_{m+1}) = (a_1, b_{m+1}) \end{aligned}$$

Ahora bien (a_1, b_{m+1}) es el par construido con los extremos de la sucesión para $\mu = m + 1$ y, por ende, la validez del lema para $\mu = m$ implica su veracidad para $\mu = m + 1$; luego también para cualquier valor de μ, que, en definitiva, es lo que se pretendía demostrar.

Corolario número 1.—El valor de la reducción de una serie normal no cambia cuando se sustituye cualquier par (a_β, b_β) de la misma, por una subserie normal que tenga como extremos a los elementos del par sustituido.

La evidencia de este corolario se sigue inmediatamente del lema número 1. Veamos:

Dada una serie arbitraria

$$(a_1, b_1) \ldots (a_\beta, b_\beta) \ldots (a_\mu, b_\mu)$$

si sustituimos, por ejemplo, el par (a_β, b_β) por la sucesión también normal

$$(a_\beta, b_{\lambda_1})\,(b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}) \ldots (b_{\lambda_\tau}, b_\beta)$$

será

$$(a_1, b_1) \dots (a_\beta, b_\beta) \dots (a_\mu, b_\mu) =$$
$$= (a_1, b_1) \dots (a_\beta, b_{\lambda_1}) (b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}) \dots (b_{\lambda_\tau}, b_\beta) \dots (a_\mu, b_\mu)$$

ya que por el lema número 1 la serie $(a_\beta, b_{\lambda_1}) \dots (b_{\lambda_\tau}, b_\beta)$ es igual al par (a_β, b_β); consiguientemente, es indiferente escribir

$$(a_\beta, b_{\lambda_1}) \dots (b_{\lambda_\tau}, b_\beta) \text{ o } (a_\beta, b_\beta).$$

Esto quiere decir que la ley de composición interna que hemos llamado «reducción» *es asociativa y distributiva.*

Teorema número 1.—Si la relación de equivalencia canónica «R« definida en A^2 es compatible con la reducción de pares ordenados, determina un homomorfismo Γ de A^2 en el conjunto cociente A^2/R; el conjunto cociente será un semigrupo y cuando contenga al elemento unidad será un grupo.

Demostración:

Según la condición 1,2), cada elemento (a, b) de una clase de equivalencia canónica c_σ solamente podrá tener un contiguo a la derecha y un contiguo a la izquierda en cada clase de la familia, pues si tuviera dos o más contiguos, las clases de equivalencia poseerían algún elemento de A repetido como primer elemento de par o como segundo, lo que contradice a la condición 1,2). De aquí se sigue que la composición de todos los elementos de una clase c_σ, con sus contiguos de otra clase c_τ, cubrirá por completo la adherencia del conjunto producto $c_\sigma\ c_\tau$, dada la compatibilidad de la relación que las define con la reducción. Por consiguiente, «R» define un homomorfismo Γ de A^2 en $A^2/$«R». Ahora bien, como, según hemos visto, la reducción es asociativa, la ley de composición interna asociada al conjunto cociente $A^2/$«R» también lo será, por lo que se implica que $A^2/$«R» tiene estructura de semigrupo por lo menos.

Si $A^2/$«R» contiene al elemento unidad, cuya clase de equivalencia correspondiente será la constituida por pares de elementos iguales, es decir

$$\mathsf{U} = \{x \in A^2 \text{ tal que si } x = (a, b) \text{ sea: } a = b\}$$

como existe el par inverso de cada par, definido por

$$(a, b) \text{ es inverso de } (c, d) \text{ si } b = c \text{ y } a = d$$

también deberá existir la clase de pares inversos de cada clase, pues, de lo contrario, «R» no sería compatible con la reducción. Consiguientemente, en el conjunto $A^2/$«R» cada elemento tendrá un inverso y, por ende, $A^2/$«R» tiene estructura de grupo, con lo que se completa la demostración de este teorema.

En lo sucesivo nos referiremos exclusivamente a relaciones de equivalencia compatibles con la reducción.

II

En lo sucesivo, la ley de composición interna asignada al grupo o semigrupo cociente $A^2/«R»$ la expresaremos con notación aditiva. Conviene, pues, tener en cuenta que con el signo $+$ no expresaremos necesariamente la operación binaria de sumar, sino a toda ley de composición interna asignada al grupo o semigrupo $A^2/«R»$.

Dada una serie arbitraria de elementos de $A^2/«R»$, por ejemplo,

$$S = \sum_{\mu} c_\mu = c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_\mu$$

donde

$$(c_1, c_2, \ldots c_\mu \in A^2/«R»)$$

llamaremos *representación normal* de dicha serie a toda *sucesión norma* de antiimágenes de S. Consiguientemente, si

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) \ldots (a_\mu, b_\mu)$$

(donde

$$\Gamma(a_\mu, b_\mu) = c_\mu)$$

es una *representación normal* de S, tendremos

2,1) $\sum_{\mu} c_\mu = \Gamma(\,(a_1\, b_1)\,(a_2, b_2) \ldots (a_\mu, b_\mu)\,)$, donde Γ es el homomorfismo de A^2 en $A^2/«R»$ determinado por $«R»$.

Ahora bien, haciendo uso del lema número 1, la 2,1) se convierte en

2,2) $$\sum_{\mu=\alpha}^{\mu=\beta} c_\mu = \Gamma(\,(a_\alpha, b_\beta)\,)$$

Este es el primer resultado importante que tratábamos de conseguir: Conocer el valor de una suma

$$\sum_{\mu} c_\mu$$

a partir de los valores extremos a_α y b_β de su representante normal.

Una aplicación biyectiva δ de A en A diremos que es *compatible con* $«R»$ cuando satisface la siguiente condición:

Si $c_\sigma = \{(a_1, b_1), (c_2, b_2) \ldots (a_n, b_n)\}$ es una clase de equivalencia determinada por $«R»$ también lo será $\delta(c_\sigma) = \{[\delta(a_1), \delta(b_1)], \ldots\}$, es decir,

$$(c_\sigma \in C) \Longrightarrow (\delta(c_\sigma) = \{[\delta(a_1), \delta(b_1)], [\delta(a_2), \delta(b_2)] \ldots\} \in C)$$

Como consecuencia, si C es la familia de clases de equivalencia determinadas por $«R»$ tendremos:

$$\delta(C) \subseteq C$$

Consiguientemente, la 2,2) también es válida en $\delta(C)$; por ende, será

$$2{,}3) \quad \sum_{\mu=\alpha}^{\mu=\beta} \delta(c_\mu) = \Gamma\,[(\delta(a_\alpha),\ \delta(b_\beta))]$$

Esta última relación es válida para cualquier serie finita; pero en el caso de que la suma.

$$\sum_{\mu=\alpha}^{\mu=\beta} \delta(c_\mu)$$

se extienda a infinitos términos, para proceder con todo rigor, debemos introducir el concepto de convergencia.

La convergencia en espacios vectoriales usuales se define sobre un conjunto de normas (generalmente, números reales positivos), que suelen ser subconjuntos de grupos abelianos. Como hemos saltado a grupos arbitrarios, se hace necesario proceder con criterios más amplios. Para ello empezaremos por definir una relación de orden de la siguiente manera.

Es un hecho bien conocido, que cualquier elemento a de un grupo G arbitrario pertenece a un subgrupo cíclico S. Si dicho subgrupo es maximal y es engendrado por un elemento $g \in$ G, existe un número natural n para cada $a \in$ S tal que $a = g^n$. Pues bien: A cada elemento $a \in$ S asignaremos dicho número natural, que llamaremos «índice de a».

Puede ocurrir que el subgrupo cíclico S tenga la potencia del continuo. En tal caso sería:

$$(\forall\ g \in \mathrm{S})\ (\exists\ x \in \mathrm{S})\ (\exists\ n > 1);\ x^n = g$$

En este caso, conviene asignar como índice de cada elemento un número real (entero, fraccionario, irracional o trascendente). Para ello eligiremos un $g \in$ S al que le asignaremos índice 1 y a todas sus potencias $\{g, g^2, g^3 \ldots\}$ efectivamente números naturales. Si x es tal que $x^n = g$ a x le asignaremos índice

$$\frac{1}{n}$$

y a sus potencias

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots;$$

así sucesivamente, asignaremos un índice para cada elemento. Al elemento unidad del grupo G le asignaremos índice 0.

Una vez asignados los índices a todos los elementos de G, podemos definir otro concepto que designamos por *oscilación*:

Si un elemento a tiene índice n llamaremos oscilación a la derecha de $b \in$ G sobre a a la diferencia de índices del producto $a\ b$ y el elemento a, es decir:

$$\text{oscilación de } b \text{ a la derecha} = \text{índice } (ab) - \text{índice } (a)$$

aunque ab y a no pertenezcan al mismo subgrupo cíclico, de forma análoga definiremos la oscilación a la izquierda.

oscilación de b a la izquierda $=$ índice (ba) — índice (a)

Representaremos por $\sigma(a)$ al conjunto de todos los valores absolutos de las oscilaciones producidas a la derecha y a la izquierda por a sobre todos los elementos de G. De forma análoga representaremos por $\bar{\sigma}(a)$ al valor máximo contenido en el conjunto $\bar{\sigma}(a)$, es decir, a la oscilación máxima:

Definamos ahora una relación de orden mediante las siguientes condiciones:

2,4) $a \leqslant b$ si $\bar{\sigma}(a) \leqslant \bar{\sigma}(b)$.

2,5) $a \geqslant b$ si $\bar{\sigma}(b) \geqslant \bar{\sigma}(a)$.

2,6) $(a \leqslant b)$ y $(b \leqslant a)$ si $\bar{\sigma}(a) = \bar{\sigma}(b)$.

2,7) Si $e \in$ G es el elemento nulo $\forall\ a \in$ G: $e \leqslant a$.

Hechos estos convenios, diremos que una serie

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \delta(c_\mu)$$

es absolutamente convergente si satisface estas condiciones:

2,8) $\forall\ \mu \in$ N : $\delta(c_\mu) < \delta(c_{\mu-1})$.

2,9) $\exists\ \mu \leqslant$ M tal que $\bar{\sigma}(\delta(c_\beta)) \leqslant \dfrac{1}{2^{\beta-\mu}}$ (donde M es finito).

Efectivamente

$$\bar{\sigma}\left(\sum_{\beta=1}^{\beta=\mu-1} \delta(c_\beta)\right) \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}\left(\sum_{\beta=\mu}^{\beta=\infty} \delta(c_\beta)\right)$$

tienen que ser finitas, pues la serie

$$\sum_\beta \frac{1}{2^\beta}$$

es convergente y la serie

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=\mu-1} \delta(c_\beta)$$

es finita, por hipótesis.

III

Una vez establecido el criterio de convergencia, procederemos a la generalización del concepto de integral, partiendo de la relación 2,3).

Nos vamos a limitar al caso de que el conjunto $A^2/«R»$ tenga estructura de grupo, es decir, que tenga elemento unidad e, Ordenando el conjunto $A^2/«R» = \{e, c_1, c_2 \ldots c_\beta \ldots\}$ mediante la relación definida anteriormente, e será el elemento mínimo. Consideremos la familia de subconjuntos de $A^2/«R»$ que contienen a e:

3,1) $B = \{x|(x \in B) \Longrightarrow (e \in x)\}$. Efectivamente, B es base de filtro de entornos de e, pues la intersección de dos elementos cualesquiera de B también pertenece a B.

Representemos por F al filtro engendrado por B. Si F_σ es un elemento de F constituido por los elementos $\{f_1, f_2 \ldots f_\beta\}$ de $A^2/«R»$, según hemos visto a cada f_β hemos asignado una oscilación máxima $\overline{\sigma}(f_\beta)$ $\overline{\sigma}(f_\beta)$: A la mayor de todas las máximas de los elementos de F_σ la llamaremos «radio» de F_σ y la representaremos con la notación $rd(F_\sigma)$, es decir,

$$rd(F_\sigma) = \max_{f_\beta \in F_\sigma} \overline{\sigma}\,(f_\beta)$$

Finalmente, elijamos $A^2/«R»$ de tal forma que e sea un punto de acumulación.

Consideremos, una vez más, la relación 2,3): Convengamos en que δ es una homeomorfía del espacio topológico así construido sobre $A^2/«R»$. Haciendo uso en 2,3 del Corolario número 1, podremos sustituir cada par en

$$\sum_{\mu=\alpha}^{\mu=\beta} \delta(c_\mu) = \Gamma[(\delta(a_\alpha), \delta(b_\alpha)), (\delta(a_{\alpha+1}), \delta(b_{\alpha+1})) \ldots (\delta(a_\beta), \delta(b_\beta))]$$

por una serie normal de n elementos cuyos extremos sean los elementos del par sustituido, por ejemplo:

3,2) $$\sum_{\substack{\mu=\alpha \\ \lambda=n}}^{\mu=\beta} \delta\left(c_\mu^\lambda\right) = \Gamma\left[\left(\delta(a_\alpha), \delta\left(b^\alpha_{1/n}\right)\right)\left(\delta\left(a^\alpha_{2/n}\right), \delta\left(b^\alpha_{2/n}\right)\right) \ldots\right.$$
$$\ldots\left(\delta\left(a^\alpha_{n/n}\right), \delta(b_\alpha)\right) \ldots \left(\delta(a_\beta), \delta\left(b^\beta_{1/n}\right)\right)\left(\delta\left(a^\beta_{2/n}\right), \delta\left(b^\beta_{2/n}\right)\right) \ldots$$
$$\left.\ldots\left(\delta\left(a^\beta_{n/n}\right), \delta(b_\beta)\right)\right]$$

donde

$$\delta\left(c_\mu^\lambda\right) = \Gamma\left(\delta\left(a^\mu_{\lambda/n}\right), \delta\left(b^\mu_{\lambda/n}\right)\right)$$

son las imágenes de los nuevos pares de la serie. Ahora el parámetro μ en $\delta\left(c_\mu^\lambda\right)$ ya no crece de unidad en unidad, sino en múltiplos de la fracción $1/n$.

Supongamos que el espacio topológico definido sobre $A^2/«R»$ es separable y convengamos en elegir los pares interpolados

$$\left(\delta\left(a^{\mu}_{\lambda/n}\right),\ \delta\left(b^{\mu}_{\lambda/n}\right)\right)$$

de tal forma que satisfagan la siguiente condición

3,3) $(\forall\lambda)$ $(\exists\ F_n \in F)$ tal que

$$(\forall\mu)\ :\ \left(\delta\left(a^{\mu}_{\lambda/n}\right),\ \delta\left(b^{\mu}_{\lambda/n}\right)\right)$$

$\in F_n$ y el radio de F_n es menor que $[^1/_n]$:

$$rd\,(F_n) < \frac{1}{n}$$

Con estas condiciones podemos efectuar el paso al límite, que llamaremos *integral generalizada de* $\delta\left(c^{\lambda}_{\mu}\right)$ y cuya expresión es

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta\left(c^{\lambda}_{\mu}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\mu=\alpha \\ \lambda=n}}^{\mu=\beta} \delta\left(c^{\lambda}_{\mu}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Gamma\left[\left(\delta(a_\alpha),\ \delta\left(b^{\alpha}_{1/n}\right)\right)\left(\delta\left(a^{\alpha}_{2/n}\right),\ \delta\left(b^{\alpha}_{2/n}\right)\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left(\delta\left(a^{\alpha}_{n/n}\right),\ \delta(b_\alpha)\right)\ldots\left(\delta\left(a^{\beta}_{\lambda/n}\right),\ \delta\left(b^{\beta}_{\lambda/n}\right)\right)\ldots\left(\delta\left(a^{\beta}_{n/n}\right)\ \delta(b_\beta)\right]$$

Aplicando el Lema número 1 obtendremos

$$4{,}3)\qquad \int_{\alpha}^{\beta} \delta\left(c^{\lambda}_{\mu}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\mu=\alpha \\ \lambda=n}}^{\mu=\beta} \delta\left(c^{\lambda}_{\mu}\right) = \Gamma[(\delta(a_\alpha),\ \delta(b_\beta)\ )]$$