LA PARADOJA DE BERTRAND. REVISION DE UN CASO HISTORICO

por

F. HERNÁNDEZ GUARCH y A. ARRIBÍ LÓPEZ

RESUMEN

Con el presente trabajo hemos pretendido hacer una revisión de un problema histórico, la paradoja de Bertrand, enfocándola con una perspectiva más general y obteniendo una solución única para ella.

Hemos encontrado un método original, que abarca, como casos particulares, a todos los que dan lugar a dicha paradoja, y que, por lo mismo, la resuelve.

La simulación por el método de Montecarlo, mediante una computadora HP-3000, nos ha permitido realizar «en vivo» el problema y hacer un estudio exhaustivo de su solución.

Se concluye el trabajo con un estudio determinístico que nos lleva de nuevo a la solución única del problema planteado.

* * *

I. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

El concepto matemático de probabilidad ha pasado por diversos estadios, hasta llegar a la formulación axiomática que se acepta hoy día. Así, Laplace la formuló como un cociente entre «casos favorables» y «casos posibles», o Von Misses la entendió como el límite de la frecuencia. Todas estas definiciones son incompletas o no operativas, al no poderse buscar un marco adecuado para desarrollarlas. Así (*), «En el siglo XIX, la definición laplaciana de probabilidad era aceptada ampliamente. Se pensaba que se podían dar soluciones únicas a los problemas de probabilidades al encontrar los marcos apropiados de descripciones igualmente probables''. Para contradecir este punto de vista se construyeron ejemplos que admitían varias soluciones plausibles, pero incompatibles».

Entre esos ejemplos aparece el de la paradoja de Bertrand, que consiste, esencialmente, en lo siguiente: Seleccionando aleatoriamente una

(*) Tomado de PARZEN, E.: «*Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*». Ed. Limura, S. A. México, 1973.

cuerda de un círculo de radio r, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda sea menor que el radio r?

Este problema, citado en muchos libros de Estadística (véase, por ejemplo, Ríos, S.: *Métodos estadísticos*, pág. 156), admite varias soluciones. Seis de ellas aparecen en el artículo (difícil de conseguir) de Czuber, «Wahrscheinlichkeitsrechnung», B. G. Teuber, Leipzig, 1908.

Dos formas de determinar «una cuerda seleccionada aleatoriamente» (y las distintas formas de hacerlo son las que ocasionan la paradoja) aparecen en el ya citado libro de Parzen, págs. 335 y 336, y son las siguientes:

a) *Primer método de selección:* Sean dos valores, X_1 y X_2, elegidos aleatoriamente en los intervalos 0 a 2π y 0 a r. Trácese una cuerda con X_1 como el ángulo que forma la cuerda, con una línea fija de referencia, y X_2 como la distancia del punto medio de la cuerda al centro del círculo (ver figura 1). Con este método de selección la solución es:

$$P(X < r) = \frac{2\,\pi r\,(1 - \sqrt{3}/2)}{2\,\pi r} = 0{,}134$$

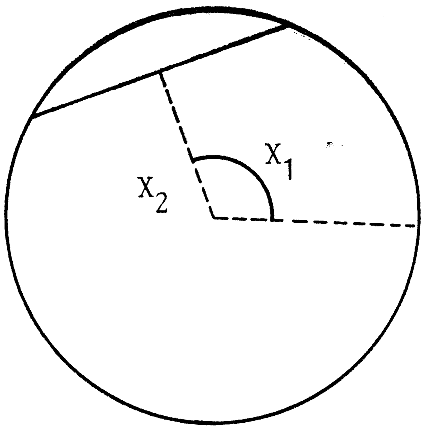

Fig. 1. *Primer método de selección aleatoria de la cuerda.*

b) *Segundo método de selección:* Son ahora X_1 y X_2 elegidos en los intervalos de 0 a 2π y de 0 a $\pi/2$, respectivamente. Trácese una cuerda con X_1 y X_2 como los ángulos de la figura 2.

Ahora la probabilidad buscada es:

$$P(X < r) = \frac{(\pi/2 - \pi/3)\,2\pi}{\pi/2 \cdot 2\pi} = 0{,}333\ldots$$

Es claro que las probabilidades son respuestas correctas a la pre-

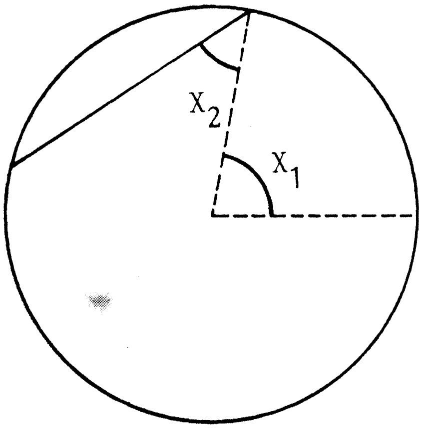

Fig. 2. *Segundo método de selección aleatoria de la cuerda.*

gunta formulada y que, por tanto, ésta no está «bien formulada» y ahí la paradoja que se ocasiona.

II. Un nuevo método.

Veamos ahora un método original de selección aleatoria de la cuerda, que abarca, como casos particulares, los anteriormente mencionados.

Consiste en, desde un punto exterior a una circunferencia, tomado a una distancia al centro X_1, valor elegido aleatoriamente de r a ∞, trazar una secante cualquiera cuyo ángulo, con el segmento que une el punto anterior con el centro de la circunferencia, es el segundo valor

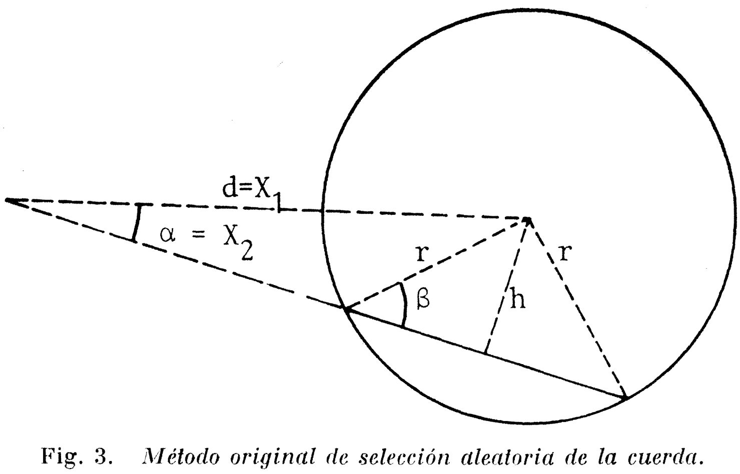

Fig. 3. *Método original de selección aleatoria de la cuerda.*

elegido aleatoriamente, X_2, que varía entre 0 y arcsen r/X_1. Véase la figura 3.

Haciendo $r = 1$, resulta:

$$X(\text{longitud de la cuerda}) = 2 \cos \beta = 2\sqrt{1-\text{sen}^2 \beta} = 2\sqrt{1-d^2 \text{ sen}^2 \alpha}$$

Para $X = r = 1$, queda

$$\alpha = \text{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2d}$$

El cálculo de la probabilidad será (véase figura 4):

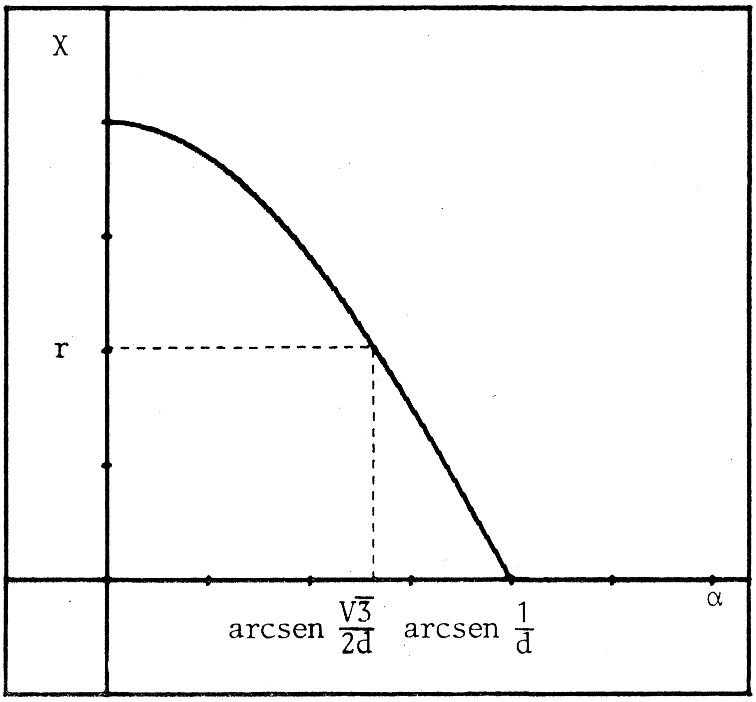

Fig. 4. *Cálculo de la probabilidad de que la cuerda seleccionada por el nuevo método sea menor o igual que el radio.*

$$P(X < r) = \frac{\text{arcsen}\left(\frac{1}{d}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2d}\right)}{\text{arcsen}\left(\frac{1}{d}\right)} = 1 - \frac{\text{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2d}}{\text{arcsen} \frac{1}{d}}$$

Para $d = X_1 = 1$ resulta:

$$P = 1 - \frac{\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{arcsen} 1} = 1 - \frac{1{,}0472}{1{,}5708} = 0{,}333....$$

que coincide con el segundo caso visto en el párrafo uno.

Busquemos ahora la probabilidad del caso límite, con d tendiendo a ∞.

Será:

$$P = \lim_{d \to \infty} \left(1 - \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{3}/2d}{\operatorname{arcsen} 1/d}\right) = 1 - \lim_{d \to \infty} \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{3}/2d}{\operatorname{arcsen} 1/d} =$$

$$= 1 - \lim \frac{\dfrac{-\sqrt{3}/2\ d^2}{\sqrt{1 - 3/4\ d^2}}}{\dfrac{-1/d^2}{\sqrt{1 - 1/d^2}}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}134$$

que es el resultado ya obtenido en el primer caso del apartado uno.

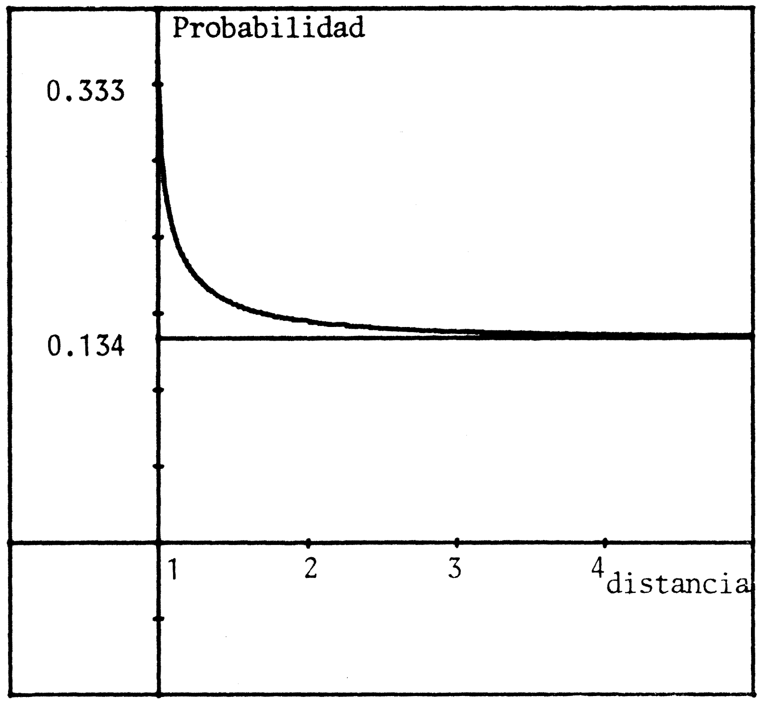

Fig. 5. *Variación del valor de la probabilidad con la distancia al centro de la circunferencia.*

Entre estos dos valores extremos tenemos un conjunto continuo de ellos que siguen la anterior gráfica (figura 5).

III. Estudio de P por el método de Montecarlo.

Para hallar la $P(X < r)$ hemos simulado, con una computadora HP-3000 los valores de X_1, X_2 mediante números aleatorios de distribución uniforme donde X_1 varía de 1 a 100 (para $d = 100$, $P = 0{,}13398$) y de X_2 de 0 a arcsen $1/d$.

Los valores que se obtuvieron quedan reflejados en la tabla 1.

El programa FBERTR 3 figura en el Apéndice.

IV. Estudio determinístico de la solución.

También hemos hallado el valor medio de la integral, que nos dará lo que consideramos la única solución del problema.

$$\mu = \frac{1}{99} \int_{1}^{100} \left(1 - \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{3}/2D}{\operatorname{arcsen} 1/D} \right) dD \approx$$

$$1 - \frac{1}{99} \sum_{D=1{,}05}^{99{,}95} \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{3}/2D}{\operatorname{arcsen} 1/D} \Delta D, \text{ con } \Delta D = 0{,}1$$

Esta expresión fue calculada con el programa que figura en el apéndice con el nombre FJ. El resultado fue:

$$P\,(X < r) = 0{,}134532$$

Teniendo en cuenta los errores que afectan al proceso, podemos suponer que la probabilidad verdadera es ligeramente superior a 0,134; en todo caso, inferior a 0,1345 y superior a 0,1339.

* * *

TABLA 1

Núm. experiencias	Probabilidad
10.000	0.1295
20.000	0.1317
30.000	0.1341
40.000	0.1348
50.000	0.1348
60.000	0.1353
70.000	0.1347
80.000	0.1349
90.000	0.1345
100.000	0.1344

FBERTR3

```
 10 REM ESTE PROGRAMA CALCULA LA PROBABILIDAD POR
 20 REM EL METODO DE MONTECARLO DE QUE UNA CUERDA
 30 REM SELECCIONADA POR EL METODO FA, SEA MENOR
        QUE EL RADIO (R=1)
 40 FILES IMP1
 45 PRINT # 1; «NUMERO DE EXPERIENCIAS»; «PROBABILI-
    DAD»
 50 LONG P
 60 N=M=0
 70 INPUT «NUMERO DE EXPERIENCIAS QUE DESEA REA-
    LIZAR», A
 80 INPUT «INTERVALO DE IMPRESION», H
 90 N=N+1
100 IF N/H=INT(N/H) THEN 180
110 IF N>A THEN 220
120 D=RND(0)*99+1
130 X=RND(1)*ATN( (1/D)/SQR(1—1/D**2) )
140 IF SIN(X)>SQR(3)/(2*D) THEN 160
150 GOTO 90
160 M=M+1
170 GOTO 90
180 P=M/N
190 PRINT # 1;"    ";N;"    ";P
200 PRINT N;P
210 GOTO 90
220 STOP
230 END
```

FJ

```
 10 REM ESTE PROGRAMA CALCULA EL VALOR MEDIO DE
 20 REM LA PROBABILIDAD DE QUE UNA CUERDA SELECCIO
 30 REM NADA POR EL PROCEDIMIENTO FA SEA MENOR
 40 REM QUE EL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA (R=1),
        HACIENDO VARIAR DO DESDE 1 HASTA 100.
 50 LONG A, B, M
 60 S=0
 70 D=, 95
 80 D=D+, 1
 90 A=ATN( (1/D)/SQR(1—<1/D)**2) )
100 B=ATN( (3**, 5/(2*D) )/SQR(1—(3**, 5/(2*D) )**2) )
110 S=S+, 1*B/A
120 IF D>99, 95 THEN 150
130 PRINT D
140 GOTO 80
150 M=1—S/99
160 PRINT M
170 STOP
180 END
```