RAICES Y LOGARITMOS EN EL CUERPO DE LOS CUATERNIOS

por

FELIPE MATEOS MATEOS

I. INTRODUCCION

En un trabajo presentado en las «V Jornadas de Matemáticas Luso-Españolas», en abril de 1978, titulado «Grupos algebraicos de dimensión 2^n sobre matrices», demostraba que el cuerpo no conmutativo de los cuaternios de componentes (a_0, a_1, a_2, a_3) es isomorfo al cuerpo de matrices de la forma:

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Desde este punto de vista, doy en este trabajo una expresión de la raíz n-sima y del logaritmo de un cuaternio, utilizando el procedimiento de cálculo de raíces y logaritmos de matrices dado en *Theorie des Matrices* de Gantmacher.

II. FORMA CANONICA DE LA MATRIZ DE UN CUATERNIO

II.1. Autovalores de A_4.

Supongamos un cuaternio, $Z = a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$ de módulo r tal que $r^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, siendo la componente $a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$ no nula, es decir, $p^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$.

Desarrollando el determinante $D_4(\lambda)$:

$$|A_4 - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} a_0-\lambda & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0-\lambda & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0-\lambda & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0-\lambda \end{vmatrix}$$

se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^4 - 4\, a_0\, \lambda^3 + 2\,(2\, a_0^2 + r^2)\, \lambda^2 - 4\, a_0\, r^2\, \lambda + r^4 = 0$$

que tiene las dos raíces dobles complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = a_0 + p\, i \quad , \quad \lambda_2 = a_0 - p\, i$$

II.2. Polinomios invariantes de A_4.

Según el apartado anterior, el polinomio característico es

$$D_4(\lambda) = (\lambda - a_0 - p\, i)^2\, (\lambda - a_0 + p\, i)^2$$

Por otra parte, el m.c.d. de los polinomios que se obtienen, al desarrollar los determinantes de tercer orden de $D_4(\lambda)$, es:

$$D_3(\lambda) = (\lambda - a_0 - p\, i)\, (\lambda - a_0 + p\, i) = (\lambda - a_0)^2 + p^2$$

y el m.c.d. de los polinomios que se obtienen al desarrollar los determinantes de segundo orden de $D_4(\lambda)$, es $D_2(\lambda) = 1$.

Luego los polinomios invariantes son:

$$P_1(\lambda) = \frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)} = (\lambda - a_0 - p\, i)\, (\lambda - a_0 + p\, i)$$

$$P_2(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda - a_0 - p\, i)\, (\lambda - a_0 + p\, i)$$

La matriz canónica correspondiente a A_4 es:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_0 + p\, i & & & \\ & a_0 - p\, i & & \\ & & a_0 + p\, i & \\ & & & a_0 - p\, i \end{pmatrix}$$

III. RAICES N-SIMAS DE LA MATRIZ DE UN CUATERNIO

Tratamos de calcular una matriz X de un cuaternio, tal que:

III.1. $X^n = A_4$.

Como es sabido, $|A_4| = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 \neq 0$, y por tanto los valores característicos de A_4 son todos distintos de cero ($|A_4|$ es el producto de los valores característicos).

Los divisores elementales de A_4 son, pues:

$$(\lambda - \lambda_1)^2 \quad , \quad (\lambda - \lambda_2)^2$$

y reduciendo A_4 a su forma normal de Jordan

III.2. $A_4 = U\,\bar{A}\,U^{-1} = U\,\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2\}\,U^{-1}$, donde U es una matriz regular $|U| \neq 0$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2\}$ es una matriz diagonal.

GANTMACHER. — *Teorema*:

Si A tiene los valores característicos λ_i y la derivada $f'(\lambda_i) \neq 0$, entonces, cuando la matriz A tenga los divisores elementales $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}$, $(\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_n)^{p_n}$, entonces la función $f(A)$ tiene los divisores elementales $[\lambda - f(\lambda_1)]^{p_1}\,[\lambda - f(\lambda_2)]^{p_2} \ldots [\lambda - f(\lambda_n)]^{p_n}$.

Puesto que los valores característicos de la matriz incógnita X, elevados a la potencia n, dan los valores característicos de A_4, los valores característicos de X son también diferentes de cero. Por consiguiente, la derivada de $f(\lambda) = \lambda^n$ no se anula para estos valores característicos y los divisores elementales de X son:

$$(\lambda - \sqrt[n]{\lambda_1})^2 \quad , \quad (\lambda - \sqrt[n]{\lambda_2})^2$$

De donde resulta que existe una matriz T regular tal que:

III.3. $$X = T\,\{\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}\}\,T^{-1}$$

y comparando (III.2) y (III.3) después de tener en cuenta (III.1) resulta:

$$T = U\,X_{\bar{A}}$$

donde la matriz $X_{\bar{A}}$ es una matriz permutable con $\bar{A}$ y sustituyendo **T** en (III.3) obtenemos la fórmula que comprende todas las soluciones de la ecuación III.1.

$$X = U\,X_{\bar{A}}\,\{\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}\}\,X_{\bar{A}}^{-1}\,U^{-1} \qquad \text{(III.4)}$$

La multivalencia del segundo miembro depende de las raíces n-simas de λ_j y además de los parámetros de la matriz $X_{\bar{A}}$.

Todas las soluciones de (III.1) son las raíces n-simas de la matriz A_4 y las designaremos $\sqrt[n]{A_4}$ y por tanto son también las raíces m-simas del cuaternio, $Z_4 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

Calculemos ahora las matrices $X_{\bar{A}}$ y U.

Las matrices $X_{\bar{A}}$, permutables con $\bar{A}$, son de la forma:

$$X_{\bar{A}} = \left(\begin{array}{cc|cc} p & o & r & o \\ o & q & o & s \\ \hline t & o & v & o \\ o & u & o & w \end{array}\right) \qquad \text{(III.5)}$$

que, como se comprueba fácilmente, también son permutables con la matriz:

$$\begin{pmatrix} \sqrt[n]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[n]{\lambda_2} & & \\ & & \sqrt[n]{\lambda_1} & \\ & & & \sqrt[n]{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

por consiguiente, las soluciones (III.4) de (III.1) no dependen de la matriz $X_{\bar{A}}$.

Para obtener la matriz U, tenemos en cuenta el polinomio invariante:

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= (\lambda - a_0 + p\, i)\,(\lambda - a_0 - p\, i) \\ &= \lambda^2 - 2\, a_0\, \lambda + a_0{}^2 + p^2 \end{aligned}$$

y considerando la función

$$\Psi(\lambda, \mu) = \frac{p_1(\mu) - p_1(\lambda)}{\mu - \lambda} = \mu + \lambda - 2\, a_0$$

$$e(\lambda) = \Psi(\lambda\, I_4, A_4) = A_4 + (\lambda - 2\, a_0)\, I_4$$

de donde

$$\text{(III.6)} \qquad U = \begin{pmatrix} pi & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & -pi & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & pi & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -pi \end{pmatrix}$$

siendo $|U| \neq 0$, siempre que $p \neq 0$, es decir, cuando el cuaternio no se reduce a un número real.

Por consiguiente:

$$X = \sqrt{A_4} = U\, \{\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \sqrt[n]{\lambda_1}; \sqrt[n]{\lambda_2}\}\, U^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} pi & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & -pi & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & pi & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[n]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[n]{\lambda_2} & & \\ & & \sqrt[n]{\lambda_1} & \\ & & & \sqrt[n]{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pi & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & -pi & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & pi & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -pi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}+\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & -\dfrac{a_1 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & -\dfrac{a_2 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & -\dfrac{a_3 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} \\ \dfrac{a_1 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & \dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}+\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & -\dfrac{a_3 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & \dfrac{a_2 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} \\ \dfrac{a_2 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & \dfrac{a_3 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & \dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}+\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & -\dfrac{a_1 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} \\ \dfrac{a_3 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & -\dfrac{a_2 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & \dfrac{a_1 i}{p}\,\dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} & \dfrac{\sqrt[n]{\lambda_2}+\sqrt[n]{\lambda_1}}{2} \end{vmatrix}$$

Resultando que la raíz n-sima del cuaternio $Z = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ es:

$$\frac{\sqrt[n]{\lambda_2}+\sqrt[n]{\lambda_1}}{2}, \quad \frac{a_1 i}{p}\,\frac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2}, \quad \frac{a_2 i}{p}\,\frac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2}, \quad \frac{a_3 i}{p}\,\frac{\sqrt[n]{\lambda_2}-\sqrt[n]{\lambda_1}}{2}$$

donde

$$\lambda_1 = a_0 + p\,i \ , \ \lambda_2 = a_0 - pi \ , \ p^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$r^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Si llamamos α el argumento del número complejo λ_1, tenemos que

$$tg\,\alpha = \frac{p}{a_0}$$

y obtenemos

$$\sqrt[n]{\lambda_1} = \sqrt[n]{a_0 + ip} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$$

$$\sqrt[n]{\lambda_2} = \sqrt[n]{a_0 - ip} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(-\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

y haciendo operaciones

$$\frac{\sqrt[n]{\lambda_1} + \sqrt[n]{\lambda_2}}{2} = \sqrt[n]{r} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\sqrt[n]{\lambda_1} - \sqrt[n]{\lambda_2}}{2} = \sqrt[n]{r}\, i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

por lo que se puede escribir:

$$\text{(III.7)} \quad \sqrt[n]{(a_0, a_1, a_2, a_3)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \frac{a_1}{p}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \frac{a_2}{p}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \frac{a_3}{p}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

Considerando el vector $\overline{v} = (a_1, a_2, a_3)$ de R^3, su módulo es p, y eligiendo el vector unitario correspondiente:

$$j = \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{a_1}{p} j_1 + \frac{a_2}{p} j_2 + \frac{a_3}{p} j_3$$

llamamos eje del cuaternio, al cuaternio puro j.

Con lo que un cuaternio $Z = a_0 j_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$ puede escribirse:

$$Z = a_0 + jp = r(\cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha)$$

donde r es el módulo del cuaternio α su argumento.

$$\text{(III.8)} \qquad \sqrt[n]{a_0 + pj} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + j \operatorname{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

La fórmula (III.8) expresa, pues, que un cuaternio de vector no nulo tiene n raíces n-simas, situadas en una circunferencia de centro el origen y de radio

$$\sqrt[n]{r}$$

en el plano determinado por el eje real a_0 y el eje j del cuaternio.

IV. POTENCIAS N-SIMAS DE UN CUATERNIO

IV.1. Potencias de j.

Sin más que hacer operaciones, se observa que:

$$j^2 = -1,\ j^3 = -j,\ j^4 = 1$$

Es decir, que la potencia n-sima de un «cuaternio puro» es $j^n = j^h$, siendo h el resto de dividir n entre 4.

IV.2. Producto de dos cuaternios con el mismo cuaternio puro j.

Si $Z = p(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$ y $Z' = p'(\cos\alpha' + j \operatorname{sen}\alpha')$

$$Z \cdot Z = p\,p'[\cos\alpha\cos\alpha' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + j(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha')] =$$
$$= p\,p'[\cos(\alpha + \alpha') + j\operatorname{sen}(\alpha + \alpha')]$$

Es decir, el producto de dos cuaternios con el mismo j imaginario puro es otro cuaternio que tiene el mismo imaginario puro j, de módulo el producto de los módulos y de argumento la suma de los argumentos.

Podemos, pues, escribir la potencia n-sima de un cuaternio $Z = (\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha)$ de la forma:

$$Z^n = p^n (\cos n \alpha + j \operatorname{sen} n \alpha)$$

Consecuencia.—Multiplicar un cuaternio $Z = p (\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha)$ por el cuaternio unitario $(\cos \beta + j \operatorname{sen} \beta)$ equivale a una rotación de ángulos β en el plano determinado por el eje real a_0 y la recta de dirección j.

V. RAIZ N-SIMA DE UN NUMERO REAL CONSIDERADO COMO CUATERNIO

Consideremos un cuaternio puro j cualquiera, entonces un número real a_0 puede escribirse:

1.º Si $a_0 > 0$, $\sqrt[n]{a_0} = \sqrt[n]{a_0 (\cos 0 + j \operatorname{sen} 0)}$

y

$$\sqrt[n]{a_0} = \sqrt[u]{a_0} (\cos 0 + j \operatorname{sen} 0) = \sqrt[n]{a_0} \left(\cos \frac{2k \pi}{n} + j \operatorname{sen} \frac{2k \pi}{n}\right)$$

2.º Si $a_0 < 0$, $\sqrt[n]{a_0} = \sqrt[n]{|a_0| (\cos \pi + j \operatorname{sen} \pi)}$

y

$$\sqrt[n]{a_0} = \sqrt[n]{|a_0| (\cos \pi + j \operatorname{sen} \pi)} =$$

$$= \sqrt[n]{|a_0|} \left(\cos \frac{\pi + 2k \pi}{n} + j \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k \pi}{n}\right)$$

Así, pues, las raíces n-simas de un número real considerado como cuaternio, son n, distintas situadas en el plano determinado por el eje real a_0 y el eje j, pero al ser éste arbitrario resulta que hay infinitas.

VI. LOGARITMO DE UN CUATERNIO

Consideremos la ecuación material

VI.1 $$e^{X} = A$$

Todas las soluciones de esta ecuación se llaman logaritmos naturales de A y se designan por $\ln A$.

Los valores característicos λ_i de A y los valores característicos η_i de X están relacionados por la fórmula $\lambda_i = e^{\eta_i}$; por consiguiente, si la ecuación (VI.1) tiene una solución, todos los valores característicos de A son diferentes de cero y A es regular ($|A| \neq 0$). Así, pues, la condición $|A| \neq 0$ es necesaria y suficiente para la existencia de soluciones de la ecuación (VI.1).

Como la matriz A_4 correspondiente a un cuaternio es regular ($|A_4| = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 \neq 0$ si el cuaternio es no nulo).

Los divisores elementales de A_4 son:

$$(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^2$$

Siendo $\lambda_1 = a_0 + p\,i$ y $\lambda_2 = a_0 - p\,i$, y la forma canónica de Jordan, correspondiente a estos divisores elementales, es:

$$A = U \bar{A} U^{-1} = U (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) U^{-1} \tag{VI.2}$$

y puesto que la derivada de la función e^{η} es diferente de cero para todos los valores de η los divisores elementales de X son:

$$(\lambda - \eta_1)^2 (\lambda - \eta_2)^2$$

donde

$$\lambda_1 = e^{\eta_1} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = e^{\eta_2}$$

o lo que es lo mismo:

$$\eta_i = ln\ \lambda_i \quad i = 1, 2$$

En el plano de la variable compleja λ, tracemos un círculo de centro λ_i y de radio inferior a $|\lambda_i|$ y designemos por $f_i(\lambda) = ln\ \lambda_i$ la rama de la función en este círculo que, en λ_i, toma un valor igual al valor característico η_i de $X (i = 1, 2)$. Así, pues, podemos poner:

$$ln\ (\lambda_i \cdot I_4) = f_i(\lambda_i \cdot I_4) = (ln\ \lambda_i)\ I_4$$

Puesto que la derivada de $ln\ \lambda_i$ no se anula (en la parte del plano λ), la matriz correspondiente a $(\lambda - \lambda_i)^2$ no tiene más que el divisor elemental $(\lambda - \lambda_i)^2$. Por consiguiente, la matriz diagonal

$$\{ln\ \lambda_1,\ ln\ \lambda_2,\ ln\ \lambda_1,\ ln\ \lambda_2\} \tag{VI.3}$$

tiene los mismos divisores elementales que la matriz incógnita X. Y existe, por consiguiente, una matriz $T (T \neq 0)$, tal que

$$X = T\ \{ln\ \lambda_1,\ ln\ \lambda_2,\ ln\ \lambda_1,\ ln\ \lambda_2\}\ T^{-1} \tag{VI.4}$$

Para determinar T, notemos que:

$$A = e^{X} = T\ \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2\}\ T^{-1}$$

y comparando con (VI.2) obtenemos:

$$T = U\ X_{\bar{A}}$$

donde $X_{\bar{A}}$ es una matriz arbitraria que permuta con $\bar{A}$ y sustituyendo en (VI.4) T por el valor anterior, obtenemos la fórmula general:

(VI.5) $\qquad X = U\, X_{\bar{A}} \{lu\ \lambda_1,\ lu\ \lambda_2,\ lu\ \lambda_1,\ lu\ \lambda_2\}\, X_{\bar{A}}^{-1}\, U^{-1}$

la matriz $X_{\bar{A}}$ es de la forma (III.5) y como se comprueba fácilmente esta matriz también es permutable con (VI.3).

Resultando, por consiguiente:

(VI.6) $\qquad X = U \{lu\ \lambda_1,\ lu\ \lambda_2,\ lu\ \lambda_1.\ lu\ \lambda_2\}\, U^{-1}$

La matriz U es la misma que la obtenida en (III.6)

Por tanto:

$$\text{(VI.7)}\quad \ln A = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln\lambda_1 + \ln\lambda_2}{2} & -\dfrac{a_1 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & -\dfrac{a_2 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & -\dfrac{a_3 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} \\ \dfrac{a_1 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & \dfrac{\ln\lambda_1 + \ln\lambda_2}{2} & -\dfrac{a_3 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & \dfrac{a_2 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} \\ \dfrac{a_2 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & \dfrac{a_3 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & \dfrac{\ln\lambda_1 + \ln\lambda_2}{2} & -\dfrac{a_1 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} \\ \dfrac{a_3 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & -\dfrac{a_2 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & \dfrac{a_1 i}{p}\dfrac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2} & \dfrac{\ln\lambda_2 + \ln\lambda_1}{2} \end{pmatrix}$$

Resultando que el logaritmo neperiano del cuaternio $Z = a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$ es:

$$\left(\frac{\ln\lambda_1 + \ln\lambda_2}{2},\ \frac{a_1 i}{p}\,\frac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2},\ \frac{a_2 i}{p}\,\frac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2},\ \frac{a_3 i}{p}\,\frac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{2}\right)$$

donde

$$\lambda_1 = a_0 + p\, i \quad , \quad \lambda_2 = a_0 - p\, i$$

Si α es el argumento de λ_1, resulta que

$$tg\ \alpha = \frac{p}{a_0}$$

$$lu\ \lambda_1 = lu(a_0 + p\ i) = lu\ r + (\alpha + 2k\ \pi)\ i$$
$$lu\ \lambda_2 = lu(a_0 - p\ i) = lu\ r + (-\alpha + 2h\ \pi)\ i$$

de donde

$$\frac{lu\ \lambda_1 + lu\ \lambda_2}{2} = lu\ r + \frac{2(k + h)\pi}{} i$$

$$\frac{lu\ \lambda_1 - lu\ \lambda_2}{2} = \alpha i + \frac{2(k - h)\pi}{} i$$

como k y h son enteros arbitrarios, si hacemos $h = - k$ resulta que:

$$\frac{ln\ \lambda_1 + ln\ \lambda_2}{2} = ln\ r$$

y

$$\frac{ln\ \lambda_1 - ln\ \lambda_2}{2} = (\alpha + 2k\ \pi)\ i$$

con lo que

$$ln\ z = ln\ r + \frac{a_1(\alpha + 2k\ \pi)}{p} j_1 + \frac{a_2(\alpha + 2k\ \pi)}{p} j_2 + \frac{a_3(\alpha + 2k\ \pi)}{p} j_3$$
$$= ln\ r + (\alpha + 2k\ \pi)\ j$$

lo que nos dice que en cada plano determinado por el eje real a_0 y el eje j hay infinitos logaritmos veperianos de un cuaternio.

VII. EXPONENCIAL DE UN CUATERNIO

Según el resultado obtenido anteriormente, resulta que:

$$e^{jp} = \cos p + j \operatorname{sen} p$$

y multiplicando por otro cuaternio del mismo eje j.

$$e^{jp} \cdot e^{jp'} = (\cos p + j \operatorname{sen} p)(\cos p' + j \operatorname{sen} p') =$$
$$= \cos (p + p') + j \operatorname{sen} (p + p') = e^{j(p+p')}$$

con lo que se puede definir:

$$e^{a_0' + jp} = e^{a_0} (\cos p + j \operatorname{sen} p)$$

y se cumple la misma propiedad para cuaternios del mismo eje

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{a_0' + p'j} \cdot e^{a_0' + p'j} = e^{a_0 + a_0'} (\cos (p + p') + j \operatorname{sen} (p + p'))$$
$$= e^{z+z'}$$

en particular $\qquad e^{2k\pi j} = 1$