UN TEOREMA DE LA TEORIA ANALITICA DE NUMEROS

por

JESÚS GÓMEZ SÁNCHEZ

Dos funciones aritméticas multiplicativas f, g que sean inversas para la Multiplicación de Dirichlet.

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$$

toman valores opuestos para cada número primo p.

Demostración. Cuando las funciones f, g son inversas para la Multiplicación de Dirichlet, se tiene

$$(f * g)(n) = \mathrm{I}(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 \text{ , si } n = 1 \\ 0 \text{ , si } n > 1 \end{cases}$$

Primeramente tenemos en cuenta el hecho de que

$$f(1) = f^{-1}(1) = 1$$

por ser funciones multiplicativas.

En segundo lugar, hemos de utilizar la relación recurrente que determina la función $g(n) = f^{-1}(n)$, mediante los valores de la función f, es decir,

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

Ahora bien, el valor $f^{-1}(p)$, para un número primo p, se obtiene haciendo $n = p$ en esta fórmula de recurrencia. Pero como el único divisor positivo de p y menor que éste es 1, la fórmula recurrente sólo contiene un sumando en el segundo miembro:

$$f^{-1}(p) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|p \\ d<p}} f\left(\frac{p}{d}\right) f^{-1}(d) = \frac{-1}{f(1)} f(p)\, f^{-1}(1)$$

y por tanto se obtiene, finalmente,

$$\boxed{f^{-1}(p) = -f(p)}$$

Ejemplo 1. Es sabido que la función de Möbius, $\mu(n)$ es inversa para la Multiplicación de Dirichlet, de la función idénticamente 1, $u(n) \equiv 1$.

Pues bien, para un número primo cualesquiera p, se tiene

$$\mu(p) = -1 = -u(p)$$

Ejemplo 2. La función $\varphi(n)$ de Euler puede expresarse por la fórmula

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

donde p es primo.

La función inversa (sentido de Dirichlet) viene dada por la expresión

$$\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n} (1 - p)\ , \ p, \text{ primo}$$

Para un número primo p, las citadas funciones asumen los valores respectivos

$$\varphi(p) = p - 1\ ,\ \varphi^{-1}(p) = 1 - p$$

siendo, pues,

$$\varphi^{-1}(p) = 1 - p = -\varphi(p)$$

Ejemplo 3. Sea la función aritmética $\sigma_3(n)$ de la suma de los cubos de los divisores de n

$$\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$$

El valor que esta función $\sigma_3(n)$ toma para un número primo p es, por consiguiente,

$$\sigma_3(p) = \sum_{d|p} d^3 = 1^3 + p^3 = 1 + p^3$$

Mientras que el valor en p, de la función inversa σ_3^{-1}, es el obtenido haciendo $n = p$ en la fórmula que expresa $\sigma_3^{-1}(n)$:

$$\sigma_3^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^3\, \mu(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Así, pues,

$$\sigma_3^{-1}(p) = \sum_{d|p} d^3 \mu(d) \mu\left(\frac{p}{d}\right) = \mu(1)\mu(p) + p^3 \mu(p)\mu(1) = -1 - p^3 =$$

$$= -(1 + p^3) = -\sigma_3(p)$$

GENERALIZACION DEL TEOREMA

En el teorema hemos necesitado el carácter multiplicativo de la función f, para asegurarnos la condición

$$f(1) = 1$$

para lo cual basta suponer únicamente que se verifica

$$f(1) = 1$$

habida cuenta que

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

para lograr una generalización del teorema en los siguientes términos.

Teorema. Toda función aritmética $f(n)$ para la cual

$$f(1) = 1$$

determina una función inversa $f^{-1}(n)$, en la multiplicación de Dirichlet, tal que los respectivos valores que toman ambas funciones, para un número primo arbitrario p, son valores opuestos

$$\boxed{f^{-1}(p) = -f(p)}$$