DETERMINANTES Y RECURRENCIAS DEL ORDEN ARBITRARIO

por

A. G. SHANNON

PROLOGO

Las determinantes pueden ser las soluciones de las recurrencias del orden segundo. Lucas [3] ha estudiado este caso cuando los coeficientes son numeros enteros, y Brown [1] lo ha estudiado cuando los coeficientes son variables.

Podemos extender estos resultados para el caso de recurrencias del orden arbitrario, r.

LA GENERALIZACIÓN.

Consideramos

$$\omega_n^{(r)} = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} P_j(n)\, w_{n-j}^{(r)}, \quad P_j(n) \neq 0$$

y definimos el determinante por $n > m$

$$d_{mn} = \begin{vmatrix} P_1(m) & P_2(m+1) & P_3(m+2) & \dots & 0 & 0 \\ 1 & P_1(m+1) & P_2(m+2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & P_1(m+2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & P_1(n-1) & P_2(n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & P_1(n) \end{vmatrix},$$

con

$$d_{mn} = \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \end{cases}$$

Dilatamos el determinante por la última columna y vemos que el determinante igualmente da solución a la recurrencia, es decir:

$$d_{mn} = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} P_j(n)\, d_{m,\, n-j}$$

La solución por $w_n^{(r)}$ se puede poner en la forma lineal independiente

$$w_n^{(r)} = \sum_{m=1}^{r} w_{r-m}^{(r)} d_{mn}, \quad n \geqslant 0$$

Se puede probar por inducción en n. Es fácil por $n = 0, 1, \ldots, r - 1$, por las condiciones en d_{mn}. Cuando $n = r$

$$\sum_{m=1}^{r} w_{r-m}^{(r)} d_{mr} = \sum_{m=1}^{r} w_{r-m}^{(r)} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \mathrm{P}_j(r)\, d_{m,\,r-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \mathrm{P}_j(r) \sum_{m=1}^{r} w_{r-m}^{(r)} d_{m,\,r-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \mathrm{P}_j(r)\, w_{r-j}^{(r)}$$

$$= w_r^{(r)}$$

Un argumento similar confirma el resultado por $n > r$.

Observaciones concluyentes.

Brown ha propuesto ejemplos por $r = 2$. Carlitz [2] considera las propiedades congruentes por $r = 2$. Cuando $r = 2$ y $(-1)^{j+1} \mathrm{P}_j(n) = 1$, con $w_1^{(2)} = w_2^{(2)} = 1$, tenemos los números de Fibonacci como en el ejercicio propuesto sobre los conejos en [4].

(School of Mathematical Sciences, The New South Wales Institute of Technology, PO Box 123, Broadway, Sydney, 2007, Australia.)

REFERENCIAS

1. A. Brown: «Solution of a certain linear difference equation», *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **11** (1974), 325-331.
2. L. Carlitz: «Congruence properties of certain polynomial sequences», *Acta Arithmetica*, **6** (1960), 149-158.
3. E. Lucas: «Théorie des fonctions numériques simplement périodiques», *American Journal of Mathematics*, **1** (1878), 184-240; 289-321.
4. «Ejercicio propuesto, 1.830», *Gaceta Matemática*, **28** (1976), 36.