PRODUCTO ESCALAR

por

VÍCTOR ARENZANA HERNÁNDEZ y PEDRO BUERA PÉREZ

La matemática que se expone en B. U. P. y C. O. U. tiene ya un rigor y nivel suficientes para analizar, a través de ella, como han surgido las sucesivas generalizaciones en Matemáticas y reflexionar un poco sobre el proceso constructivo de las mismas.

Muchas veces los alumnos se preguntan para qué sirve tanta formalización y tanta definición abstracta, que luego aplicaremos, solamente, a cosas muy concretas utilizando una de sus expresiones más sencillas, y, además, no echamos mano de la definición abstracta más que en el caso de ejercicios encaminados a afianzar la comprensión abstracta del concepto. Esto supone para los alumnos un agobio de memoria si no se le hace comprender de alguna manera el porqué de la conveniencia de las definiciones muy generales.

De antemano justificamos la introducción de conceptos más abstractos de lo necesario para la inmediata aplicación al curso concreto, porque la Matemática necesita un lenguaje potente, capaz de generar, por sí sólo, nuevas panorámicas. (De todos es conocido que la numeración no evolucionó en la práctica hasta que no se descubrió el lenguaje posicional numérico y que Arquímedes, aún teniendo las ideas del cálculo de áreas de figuras cualesquiera en su método de exahución, no pudo generalizarlo por no estar preparado en su tiempo el lenguaje de límites, que fue, en definitiva, el que hizo posible que Newton y Leibnitz vieran la relación entre la derivada y la integral, resolviendo así el problema en el caso más general.)

En estas notas pretendemos dar una idea de cómo una idea se va generalizando hasta ser abstracta y justificar esta generalización.

1. PRODUCTO ESCALAR. DEFINICION

1.*a*) Definición geométrica.

Supongamos que estamos en el espacio vectorial real

$$R^2 = \{(a, b) / a, b \in R\}$$

con las operaciones

+) $R^2 \times R^2 \longrightarrow R^2$ tal que $(a, b) + (a' b') = (a + a', b + b')$.
·) $R \times R^2 \longrightarrow R^2$ tal que $t \cdot (a, b) = (t \cdot a, t \cdot b) \quad t \in R$.

El comprobar que R^2, con estas operaciones, es un espacio vectorial, es inmediato.

Si partimos de la representación habitual cartesiana, usada en la geometría analítica, en la que los ejes de representación son perpendiculares, la distancia entre el origen y (a, b) viene dada sin más que aplicar el teorema de Pitágoras por:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Fig. 1)}$$

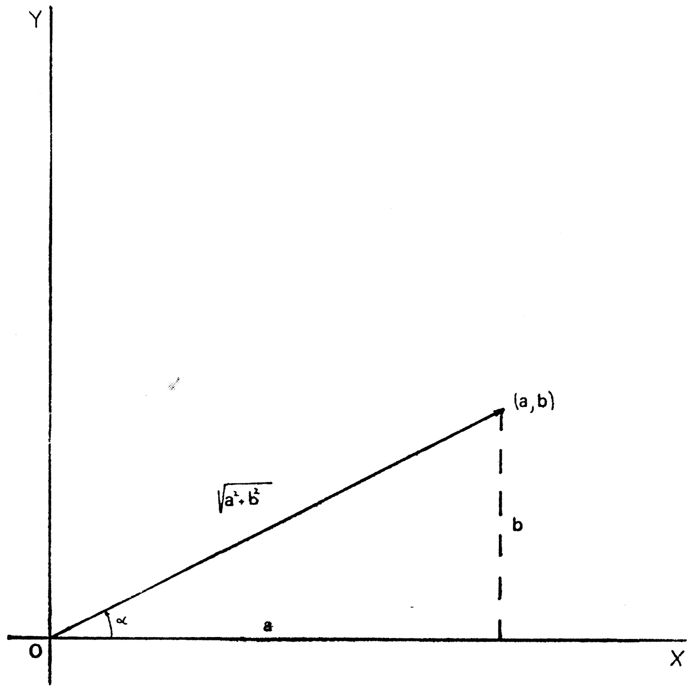

Fig. 1

Al número real, $\sqrt{a^2 + b^2}$, lo denominaremos norma del vector (a, b) y lo expresaremos de la siguiente forma:

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por otro lado, el ángulo que forma (a, b) con el semieje positivo OX, viene determinado por:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Además, si queremos determinar el ángulo que forman dos vectores (a, b) y (a', b'), por trigonometría, tenemos:

$$\cos \theta = \cos (\alpha' - \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha' =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{\sqrt{a^2 + b^2} \quad \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

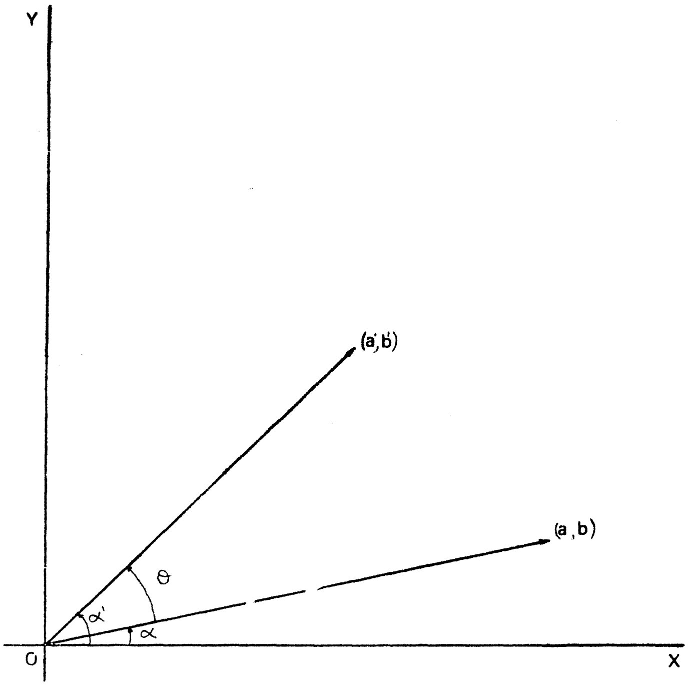

Fig. 2

Si observamos las fórmulas de la norma (sacada por el teorema de Pitágoras) y del coseno del ángulo que forman dos vectores (sacada por trigonometría elemental) vemos que los ángulos dependen:

a) De las normas de los vectores que lo forman.
b) De la suma del producto de sus primeras componentes y el producto de las segundas.

Teniendo en cuenta esto, cabe definir una operación de la siguiente forma:

$$(a, b) \cdot (a', b') = a \cdot a' + b \cdot b'$$

1.1. Definición.

Definimos producto escalar como una aplicación de $R^2 \times R^2$ en R dada por:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a \cdot a' + b \cdot b'$$

donde

$$\vec{v} = (a, b) \qquad \vec{w} = (a', b')$$

A partir de esta definición de producto escalar, extraída de la geometría, podemos observar:

a) Que la norma de $\vec{v} = (a, b)$ es:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a, b) \cdot (a, b)} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

b) Que el ángulo que forman los vectores $\vec{v} = (a, b)$ y $\vec{w} = (a', b')$ viene dado por

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2}} = \frac{(a, b) \cdot (a', b')}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|} = \frac{v \cdot w}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

Como propiedades inmediatas de la definición 1.1 podemos considerar las siguientes:

i) Conmutativa.

ii) Distributiva respecto a la suma.

iii) $\|\vec{v}\| \geqslant 0\ \forall\ \vec{v}$, ya que $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y sólo puede ser cero si $\vec{v} = (a, b) = (0, 0)$.

iv) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$.

v) $\vec{v} \cdot \vec{w} \leqslant \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ (Desigualdad de Schwarz), ya que $-1 \leqslant$ $\leqslant \cos \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \leqslant 1$.

1.b) *Definición algebraica.*

Ahora, prescindiendo del sentido geométrico, y fijándonos sólo en sus propiedades como operación, definimos:

1.2. Definición.

Definimos producto escalar como una aplicación

$$" \cdot " : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$$

que cumpla:

i) Conmutativa o simétrica

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

ii) Bilineal

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \text{ (distributiva respecto a la suma)}$$

$$t \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (t \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (t \cdot \vec{v}) \quad t \in R$$

iii) Positiva

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0 \qquad \forall \, \vec{u} \in R$$

Observaciones.

a) Esta definición puede hacerse dentro del álgebra abstracta diciendo que es una forma bilineal, simétrica definida positiva.

b) La condición *iii*) puede considerarse únicamente cuando el cuerpo sobre el que está construido el espacio vectorial sea R o un subcuerpo suyo. No puede hacerse, por ejemplo, si el cuerpo es C, ya que $z > 0$ no tiene sentido $\forall \, z \in C$. (Por esto, si queremos definir un producto escalar en C, habrá que hacer unas consideraciones especiales.)

2. MATRIZ DEL PRODUCTO ESCALAR (definida para R^2)

2.1. Proposición.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de R^2 y $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base cualquiera. Si $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ tenemos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [x \quad y] \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

D) Basta con aplicar la definición de producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2) \cdot (x' \cdot \vec{e}_1 + y' \cdot \vec{e}_2) \; (1) = x \cdot x' \, \vec{e}_1 \, \vec{e}_1 +$$

$$+ x \cdot y' \, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + x' \cdot y \, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + y \cdot y' \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 =$$

$$= [x \; y] \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

(1) = Por la bilinealidad del producto escalar.

2.2. DEFINICIÓN.

Se llama matriz del producto escalar a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz será simétrica por el apartado *iii*) de la definición 1.2.

Obsérvese que para que se cumplan las condiciones *i*) y *ii*) de la definición 1.2 basta con tener definidos los productos $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, donde

$$i = 1,2 \qquad j = 1,2$$

Sin embargo, esta condición no basta para que se cumpla *iii*)

$$(\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0 \qquad \forall \vec{u} \in R)$$

Esta condición viene dada por la siguiente proposición:

2.3. PROPOSICIÓN.

Si $\vec{u} = (x, y)$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{vmatrix} \geqslant 0 \wedge \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \geqslant 0$$

D) Llamamos

$$a = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \geqslant 0$$

$$b = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1$$

$$c = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow > \quad \text{Si } \vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0 \Rightarrow [x \quad y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geqslant 0$$

donde

$$\vec{u} = (x, y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad x^2 a + 2xyb + y^2 c \geqslant 0 \quad \forall\, x, y$. En particular, si $x = -c$, $y = b$

$$c^2 a - 2cb^2 + b^2 c \geqslant 0 \Rightarrow c(ca - b^2) \geqslant 0 \wedge c \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ca - b^2 \geqslant 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geqslant 0$$

$$\Leftarrow \quad \text{Si } ca - b^2 \geqslant 0 \Rightarrow (xa + yb)^2 + y^2(ca - b^2) \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2a^2 + 2xyab + y^2ca \geqslant 0 \Rightarrow a(x^2a + 2xyb + y^2c) \geqslant$$
$$\geqslant 0 \wedge a \geqslant 0 \Rightarrow x^2a + 2xyb + y^2c \geqslant 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$$

Obsérvese que la proposición 2.3 es evidente, teniendo en cuenta que una función $y = ax^2 + bx + c$ es definitiva positiva si y sólo si tiene un mínimo en el semiplano superior, lo cual equivale a:

$$ac - b^2 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad a \geqslant 0$$

De este modo, cualquier matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

tal que $ac - b^2 \geqslant 0$ y $a \geqslant 0$ representa la matriz de un producto escalar en el sentido que lo hemos definido.

A partir de este producto escalar, definido ya formalmente, podemos introducir dos nociones:

i) Norma de un vector.

ii) Vectores ortogonales.

2.4. Definición.

Llamamos norma del vector $\vec{a}$ y la representamos por $||\vec{a}||$ a la expresión

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

De esta definición pueden deducirse las siguientes propiedades:

a) $||\vec{a}|| \geqslant 0 \quad \forall \vec{a}$

b) $||\vec{a}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

c) $||\lambda \vec{a}|| = |\lambda| \; ||\vec{a}|| \qquad \lambda \in R.$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant ||\vec{a}|| \; ||\vec{b}||$ (Desigualdad de Schwars)

e) $||\vec{a} + \vec{b}|| \leqslant ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$ (Desigualdad triangular).

2.5. Definición.

Se dice que un vector $\vec{a}$ es unitario si

$$||\vec{a}|| = 1$$

2.6. Definición.

Dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se dicen ortogonales si

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Una vez vista la definición algebraica de producto escalar, separada de la intuición geométrica, vamos a analizar si con esta generalización se ha extendido el concepto de producto escalar geométrico y lo ha dejado inmerso dentro de un lenguaje más general que pueda ser utilizado en otros conceptos, ya no geométricos, pero que permitan en cierta manera «medir» (idea de la que hemos partido) otros conjuntos.

3. MATRICES QUE MANTIENEN LA DISTANCIA EUCLIDEA. MATRICES EN LAS QUE COINCIDEN LOS CONCEPTOS DE ORTOGONALIDAD Y PERPENDICULARIDAD

Una matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

tal que $ac - b^2 \geqslant 0$ y $a \geqslant 0$ no garantiza, «a priori», que la distancia origen-punto (Norma del vector) sea la distancia euclídea habitual, ni que dos vectores ortogonales sean perpendiculares geométricamente.

Veamos, como ejemplo, qué sucede si consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

suponiendo que los ejes coordenados forman un ángulo de 90°.

1) La distancia euclídea habitual entre los puntos 0(0, 0) y P(1, 1) es $\sqrt{2}$, mientras que si consideramos la distancia entre esos dos puntos, como la norma del vector $\overrightarrow{OP}$, tenemos:

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}} = \sqrt{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{3}$$

2) El vector (1, 1) es ortogonal al vector (—1, 2), ya que

$$[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

pero, trivialmente, estos dos vectores no son perpendiculares geométricamente, ya que, como se puede apreciar en la figura 3, dos vectores son perpendiculares geométricamente si son de la forma:

$$(a, b) \qquad (-tb, ta) \qquad t \in \mathrm{R}$$

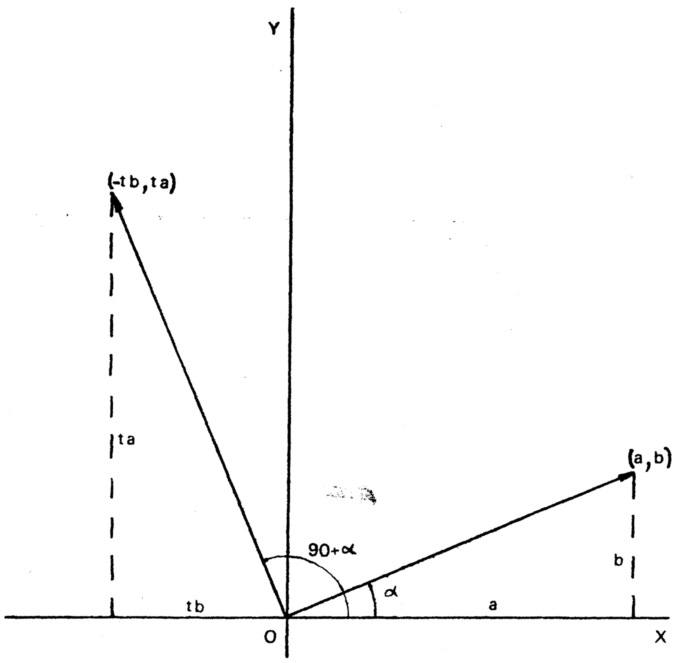

Fig. 3

Estudiaremos aquellas matrices que mantienen la distancia euclídea habitual y aquéllas en las que los conceptos de ortogonalidad y perpendicularidad coinciden.

3.a) *Matrices que mantienen la distancia euclidea habitual.*

Suponiendo que los ejes coordenados forman un ángulo A, la distancia euclídea entre los dos puntos, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, viene dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos A}$$

Llamando

$$x_2 - x_1 = x$$
$$y_2 - y_1 = y$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos A}$$

Consideremos la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

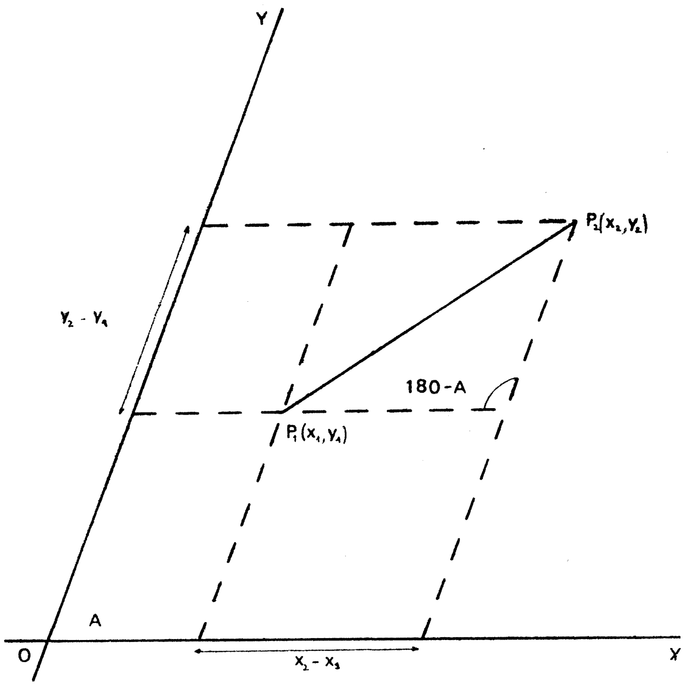

Fig. 4

asociada a un producto escalar y veamos la relación que debe existir entre a, b y c para que esta matriz mantenga la distancia euclídea

$$\text{Si } \vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} \quad \| \vec{a} \|^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= [ax + by \quad bx + cy] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Por tanto, debe verificarse:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos A = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \forall\ x, y \in R$$

Así, obtenemos que

$$a = 1 \quad c = 1 \quad b = \cos A$$

De acuerdo con esto, la matriz buscada será:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ \cos A & 1 \end{bmatrix}$$

3.b) *Matrices en las que los conceptos de ortogonalidad y perpendicularidad geométrica coinciden.*

Para que los vectores $\vec{u}(p, q)$ y $\vec{v}(r, s)$ sean perpendiculares, según la figura 5, debe verificarse:

$$\frac{q\text{senA}}{p + q\cos\text{A}} = \frac{r - s\cos\text{A}}{s \cdot \text{sen}a}$$

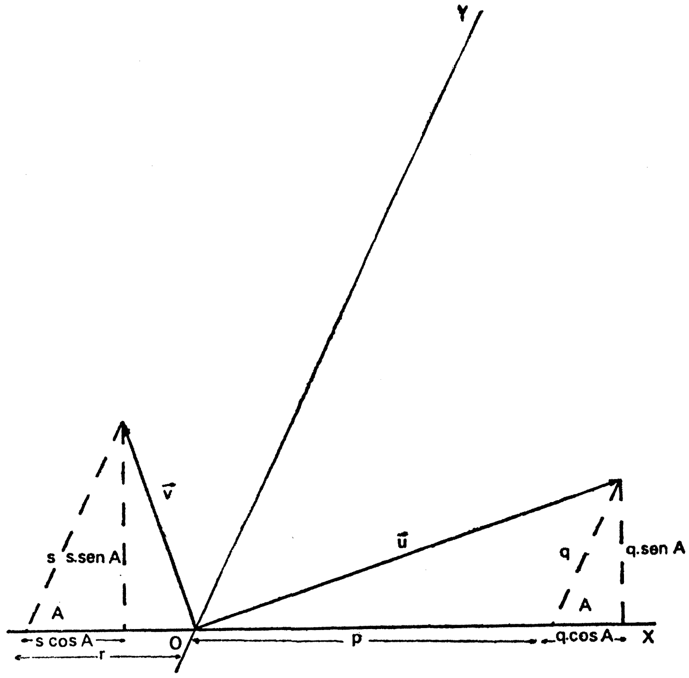

Fig. 5

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales

$$[p \quad q] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -k(pb + qr) \\ s = k(pa + qb) \end{cases}$$

Para que exista coincidencia entre los dos conceptos

$$\frac{q\text{senA}}{p + q\cos\text{A}} = \frac{k(pb + qc) - k(pa + qb)\cos\text{A}}{k(pa + qb)\text{senA}}$$

$$\frac{q\text{senA}}{p + q\cos\text{A}} = \frac{pb + qc - pa\cos\text{A} - qb\cos\text{A}}{pa\text{senA} + qp\text{senA}}$$

$$p^2(b - a\cos\text{A}) + pq(c - a) + q^2(c \cdot \cos\text{A} - b) = 0 \quad \forall\ p, q$$

Por tanto,

$$b = a\cos A \ ; \ b = c \cdot \cos A \ ; \ c = A$$

De este modo hemos obtenido la matriz

$$\begin{bmatrix} a & a\cos A \\ a\cos A & a \end{bmatrix}$$

que salvo el coeficiente de proporcionalidad a coincide con la matriz obtenida en el apartado 3.a).

Como consecuencia de estos resultados obtenemos. Si:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

es una base del espacio vectorial y el producto escalar es el determinado por la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ \cos A & 1 \end{bmatrix}$$

se verifica:

$$i) \quad ||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2||$$

$$ii) \quad \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}$$

Además, el problema de trabajar con la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ \cos A & 1 \end{bmatrix}$$

se simplifica si tenemos en cuenta que esta matriz deriva de la matriz unidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sin más que aplicar un cambio de base de matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ 0 & \operatorname{sen} A \end{bmatrix}$$

$$X' \, I \, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos A & \operatorname{sen} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ 0 & \operatorname{sen} A \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos A & \operatorname{sen} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ 0 & \operatorname{sen} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos A \\ \cos A & 1 \end{bmatrix} = M$$

Por tanto, todas las matrices que mantienen distancias y ángulos geométricos responden a una matriz del tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

salvo cambios de base.

Habitualmente, un producto escalar, que esté definido por la matriz unidad, se dice que está referido a una base ortonormal.

Observaciones:

a) Los vectores de una base ortonormal, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, son unitarios, ya que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$.

b) Los vectores de una base ortonormal, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, son ortogonales, ya que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$.

c) La matriz I será una matriz que mantendrá la distancia euclídea y en la que coincidirán los conceptos de ortogonalidad y perpendicularidad geométrica solamente cuando cosA $= 0$, donde A es el ángulo que forman las direcciones de los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Esto lleva consigo el que los vectores que constituyen la base son perpendiculares geométricamente.

Con todo lo visto hasta ahora, podemos observar que los conceptos de ortogonalidad $(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$ y perpendicularidad (90°) no coinciden para un producto escalar cualquiera.

Un proceso análogo al llevado en R^2 se puede trasladar a R^3, pero en un espacio general R^n la perpendicularidad no tiene constatación desde el punto de vista geométrico, ya que no es intuitivo y se puede hacer coincidir ortogonalidad y perpendicularidad, como habitualmente se hace en la literatura.

4. IMPORTANCIA DE LA DEFINICION ALGEBRAICA DE PRODUCTO ESCALAR

De todo lo dicho anteriormente, podemos inferir que la definición algebraica puede extenderse y generalizarse, mientras que la geométrica sólo se puede aplicar a espacios de puntos (geométricos).

Así, la definición de producto escalar en R^n sobre R es la misma que la dada en la definición 1.2 y sus propiedades son, por tanto, las mismas.

Además, la definición 1.2 puede extenderse sin ninguna dificultad al caso del espacio E sobre C con propiedades análogas al producto escalar habitual, cosa que no hubiéramos podido hacer de haber considerado únicamente el sentido geométrico.

Si hemos de extender el producto escalar definido en R^n sobre R a E sobre C lo haremos de modo que la restricción de éste último coincida con el primero.

4.1. DEFINICIÓN.

Sea E un espacio vectorial sobre C. Definimos producto escalar como una función E $\times$ E $\longrightarrow$ C, tal que a cada par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ le hace corresponder un número complejo que designaremos por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tal que

i) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in$ E.

ii) $(c\vec{u} \cdot \vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \vec{u}, \vec{v} \in$ E $\quad c \in$ C.

iii) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \overline{(\vec{v} \cdot \vec{u})}$, donde la barra indica conjugación.

iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$, si $\vec{u} \neq 0 \quad \forall \vec{u} \in$ E.

Observaciones:

1) $\vec{u} \cdot (c\vec{v} + \vec{w}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{i} \cdot \vec{w})$.

D. $\vec{u} \cdot (c\vec{v} + \vec{w}) = \overline{(c\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u}} = \overline{c(\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{w} \cdot \vec{u})} = \overline{c(\vec{v} \cdot \vec{u})} + \overline{(\vec{w} \cdot \vec{u})} =$
$= c(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$.

2) Si R es el cuerpo de los reales, teniendo en cuenta que el conjugado de un número real es el mismo, la definición en C coincide con la de R. En el caso de los complejos las conjugaciones son necesarias para que las condiciones tengan consistencia. Si no hubiéramos puesto las condiciones de conjugación, tendríamos:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$$

y

$$i\vec{u} \cdot i\vec{u} = -1(\vec{u} \cdot \vec{u}) > 0$$

lo que es una contradicción.

Con esta definición general, que contiene a todas las demás, se pueden dar los resultados siguientes:

4.2. DEFINICIÓN.

Se llama espacio euclídeo a un espacio vectorial real o complejo con un producto escalar definido en este espacio.

4.3. DEFINICIÓN.

Sea un espacio euclídeo E. Llamaremos norma del vector $\vec{u}$ a:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

4.4. Definición.

Sea un espacio euclídeo E. Diremos que el vector $\vec{u}$ es unitario si

$$\|\vec{u}\| = 1$$

4.5. Definición.

Sea un espacio euclídeo E. Se dice que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

4.6. Definición.

Sea un espacio euclídeo E. Una base de E se llama ortonormal si sus vectores son unitarios y ortogonales dos a dos.

4.7. Teorema.

Sea E un espacio euclídeo. $\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in E$ y $c \in C$ se tiene:

i) $\|c\vec{u}\| = |c|\ \|\vec{u}\|$.

ii) $\|\vec{u}\| > 0 \quad \forall\ \vec{u} \neq 0$.

iii) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \leqslant \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$ (Desigualdad de Schwarz).

iv) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Desigualdad triangular).

D. *i*) $\|c\vec{u}\| = (c\vec{u} \cdot c\vec{u})^{1/2} = [c\bar{c}(\vec{u} \cdot \vec{u})]^{1/2} = |c|\ \|\vec{u}\|$.

ii) Trivial.

iii) Esta propiedad es válida si $\vec{u} = 0$. Si $\vec{u} \neq 0$ definamos

$$\vec{w} = \vec{v} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

Calculamos $\vec{w} \cdot \vec{u}$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \left[\vec{v} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right]\vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}\|\vec{u}\|^2 = 0$$

Luego $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

$$0 \leqslant \| \vec{w} \|^2 = \left[\vec{v} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{\| \vec{u} \|^2} \vec{u} \right] \cdot \left[\vec{v} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{\| \vec{u} \|^2} \vec{u} \right] =$$

$$= (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}) \ (\vec{u} \cdot \vec{v})}{\| \vec{u} \|^2} = \| \vec{v} \|^2 - \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|^2}{\| \vec{u} \|^2}$$

Luego de $\qquad 0 \leqslant \| \vec{v} \|^2 - \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|^2}{\| \vec{u} \|^2}$

se tiene $\qquad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \| \vec{u} \| \ \ \| \vec{v} \|$

iv) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \| \vec{u} \|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{u}) +$

$+ \| \vec{v} \|^2 \underset{(1)}{=} \| \vec{u} \|^2 + 2 \text{ Real } (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \| \vec{v} \|^2 \underset{(2)}{\leqslant}$

$\leqslant \| \vec{u} \|^2 + 2 \| \vec{u} \| \ \ \| \vec{v} \| + \| \vec{v} \|^2 = (\| \vec{u} \| +$

$+ \ \| \vec{v} \|)^2$

luego $\qquad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$

4.8. TEOREMA

Todo espacio euclídeo posee una base ortonormal.

D. Sea el espacio euclídeo E y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de E.

En primer lugar, hallaremos una base constituida por vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ortogonales dos a dos.

Elegiremos

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

$\vec{v}_2$ lo obtendremos de la siguiente forma:

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - t\vec{v}_1$$

---

(1) = Por ser $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$ conjugados.

(2) = Aplicando *iii*).

donde t es un escalar condicionado por el hecho de que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ deben ser ortogonales. Por tanto

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 - t\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$$

$$t = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}{||\vec{u}_1||^2}$$

Análogamente

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - s\vec{v}_1 - r\vec{v}_2$$

donde s y r los obtenemos suponiendo que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son ortogonales dos a dos

$$s = \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{||\vec{v}_1||^2} \qquad r = \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_2||^2}$$

El proceso se prosigue con $v_4, \ldots\ldots, v_n$. Evidentemente

$$\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$$

es base de E.

Para que esta base, que es ya ortogonal por construcción, sea ortonormal bastará con normalizar los vectores $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$. Es decir:

$$\frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||}, \frac{\vec{v}_2}{||\vec{v}_2||}, \ldots\ldots, \frac{\vec{v}_n}{||\vec{v}_n||}$$

CONCLUSION

A lo largo de este trabajo hemos pretendido llevar a cabo un proceso de sucesivas generalizaciones partiendo de una realidad más o menos intuitiva, pasando por sucesivos grados de abstracción hasta generalizaciones que, siendo abstractas y no representables geométricamente, tienen las mismas propiedades. (Basta ver, para ello, que la definición de producto escalar $(a, b) \cdot (a', b') = a \cdot a' + b \cdot b'$ tiene las mismas propiedades que la dada para C —Definición 4.1)).

Es decir, podemos aplicar a conjuntos distintos una medida con la misma estructura y funcionamiento que la medida geométrica.

FUNCION CUYA GRAFICA ES UNA POLIGONAL DE VERTICES DADOS

por

VIRTUDES GOMIS GOMIS

Sea la sucesión de puntos: $P_i(x_i, y_i)$, $i \in [1, n] \subset \mathbf{N}$, tales que $\forall\ i \in [1, n-1]$, $x_i < x_{i+1}$.

Se considerarán las funciones definidas sucesivamente en los apartados siguientes.

a) La función

$$y = y_i + m_i(x - x_i) \qquad [I]$$

representa una recta que pasa por $P_i(x_i, y_i)$ y tiene de pendiente m_i (figura 1).

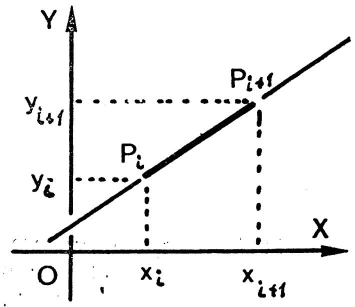

Fig. 1

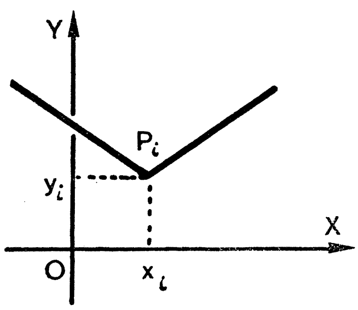

Fig. 2

Si

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad [II]$$

la recta [I] es la P_iP_{i+1} (Fig. 1).

b) La función

$$y = y_i + m_i\,|x - x_i| \qquad [III]$$

tiene por gráfica un ángulo de vértice $P_i(x_i, y_i)$, su lado derecho tiene de pendiente m_i, mientras que su lado izquierdo, $—m_i$ (Fig. 2).

c) La semisuma de [I] y [III].

$$y = y_i + \frac{1}{2} m_i \, [(x - x_i) + |x - x_i|] \qquad [IV]$$

es una función que para

$$x \leqslant x_i, \text{ vale } y = y_i + \frac{1}{2} m_i \, [(x - x_i) - (x - x_i)] = y_i$$

$$x_i \leqslant x, \text{ vale } y = y_i + \frac{1}{2} m_i \, [(x - x_i) + (x - x_i)] = y_i + m_i(x + x_i)$$

En el primer caso, la gráfica es una semirrecta paralela a OX y de extremo P_i (Fig. 3).

La gráfica del segundo caso es una semirrecta de extremo P_i y de pendiente m_i (Fig. 3).

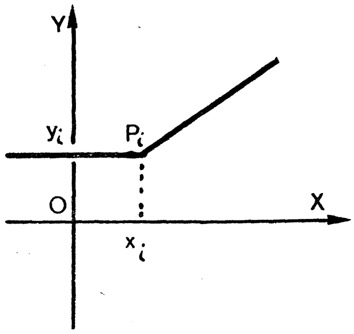

Fig. 3

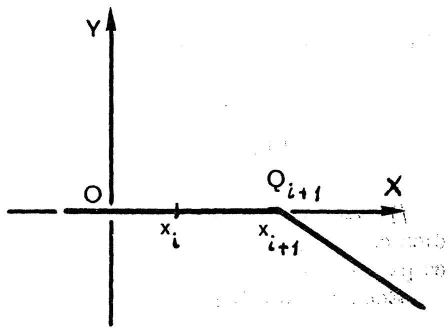

Fig. 4

d) Aplicando [IV] al punto $Q_{i+1}(x_{i+1}, 0)$ y a la pendiente $—m_i$, resulta

$$y = -\frac{1}{2} m_i \, [(x - x_{i+1}) + |x - x_{i+1}|] \qquad [V]$$

para $x \leqslant x_{i+1}$, vale $y = 0$, su gráfica es una semirrecta situada sobre OX (figura 4).

Y para $x_{i+1} \leqslant x$, $y = -m_i(x - x_{i+1})$, la gráfica es una semirrecta de extremos $Q_{i+1}(x_{i+1}, 0)$ y de pendiente $—m_i$ (Fig. 4).

e) Sumando los segundos miembros de [IV] y [V] se obtiene la función

$$y = y_i + \frac{1}{2} m_i \, [(x - x_i) + |x - x_i|] - \frac{1}{2} m_i \, [(x - x_{i+1}) + |x - x_{i+1}|]$$

$$y = y_i + \frac{1}{2} m_i \, [x_{i+1} - x_i + |x - x_i| - |x - x_{i+1}|] \qquad [VI]$$

Se comprueba que [VI] es para

$$x \leqslant x_i, \qquad y = y_i$$

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \qquad y = y_i + m_i(x - x_i)$$

$$x_{i+1} \leqslant x, \qquad y = y_i + m_i(x_{i+1} - x_i) = y_{i+1}$$

La última transformación se hace teniendo en cuenta [II].
La gráfica está representada en la figura 5.

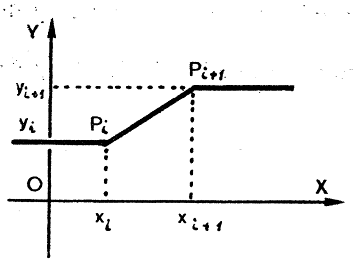

Fig. 5

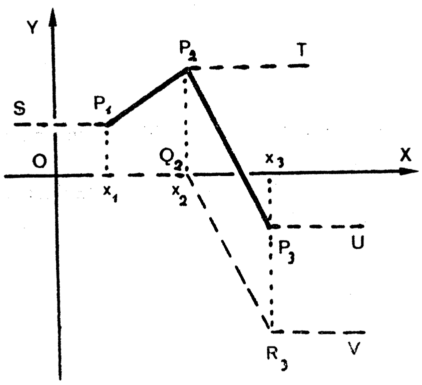

Fig. 6

f) Aplicando las conclusiones anteriores se obtiene, como se indica en la figura 6, donde SP_1, P_2T, P_3U, R_3V son paralelas a OX, Q_2R_3 es paralela a P_2P_3, m_1 y m_2 tienen el significado [II], se deduce:

Ecuación de SP_1P_2T:

$$y = y_1 + \frac{1}{2} m_1 [x_2 - x_1 + |x - x_1| - |x - x_2|]$$

Ecuación de OQ_2R_3V:

$$y = \frac{1}{2} m_2 [x_3 - x_2 + |x - x_2| - |x - x_3|]$$

Sumando los segundos miembros de las dos funciones anteriores, resulta la ecuación de $SP_1P_2P_3U$,

$$y = y_1 + \frac{1}{2} m_1 [x_2 - x_1 + |x - x_1| - |x - x_2|] +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 [x_3 - x_2 + |x - x_2| - |x - x_3|] \qquad \text{[VII]}$$

Evidentemente que para $x_1 \leqslant x \leqslant x_3$ la función tiene por gráfica la poligonal $P_1P_2P_3$.

g) El proceso utilizado en *f*) para deducir [VII] se aplica a los n puntos P_1, P_2, ..., P_n y resulta la función [VIII], que para $x \in [x_1, x_n]$ tiene por gráfica la poligonal propuesta.

$$y = y_1 + \frac{1}{2} m_1 [x_2 - x_1 + |x - x_1| - |x - x_2|] +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 [x_3 - x_2 + |x - x_2| - |x - x_3|] +$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ \frac{1}{2} m_{n-1} [x_n - x_{n-1} + |x - x_{n-1}| - |x - x_n|] \quad \text{[VIII]}$$

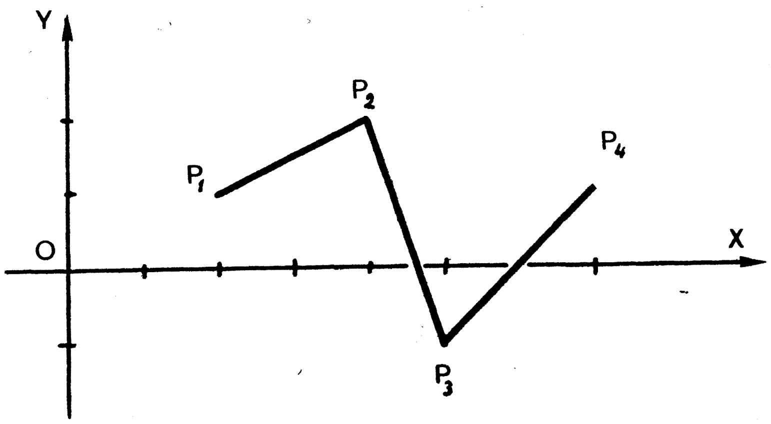

Fig. 7

Ejemplo: Hallar la ecuación de la poligonal de vértices: $P_1(2, 1)$, $P_2(4, 2)$, $P_3(5, -1)$, $P_4(7, 1)$ (Fig. 7).

Solución: Aplicando [II]:

$$m_1 = \frac{2 - 1}{4 - 2} = \frac{1}{2} \; ; \; m_2 = \frac{-1 - 2}{5 - 4} = \frac{-3}{1} = -3 \; ;$$

$$m_3 = \frac{1 + 1}{7 - 5} = \frac{2}{2} = 1$$

Aplicando [VIII]:

$$y = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [4 - 2 + |x - 2| - |x - 4|] +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (-3) [5 - 4 + |x - 4| - |x - 5|] +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 1 [7 - 5 + |x - 5| - |x - 7|], \quad x \in [2, 7]$$

Y después de efectuar operaciones, resulta

$$y = 1 + \frac{1}{4} |x - 2| - \frac{7}{4} |x - 4| +$$

$$+ 2 |x - 5| - \frac{1}{2} |x - 7|, \quad x \in [2, 7]$$