APLICACION DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES AL CALCULO DE DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS DE TEMPERATURA EN SOLIDOS

por

JULIO LEON ALVAREZ

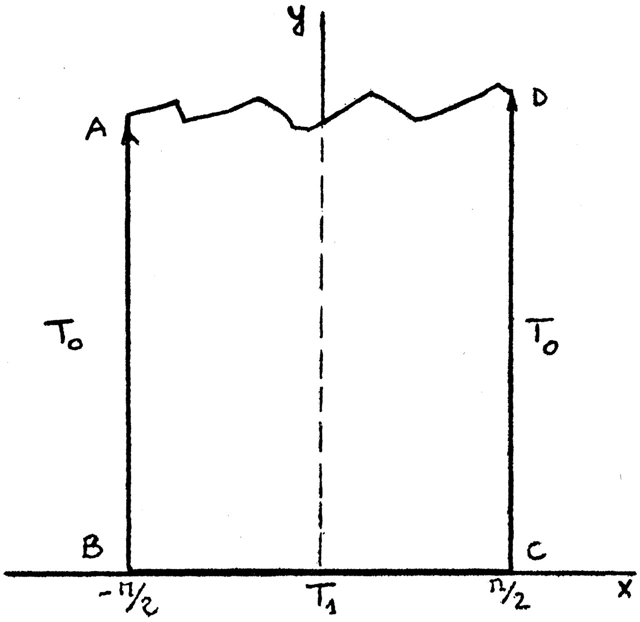
(Continuación)

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN UNA PLACA SEMI-INFINITA.

Consideremos una placa limitada por los planos

$$x = \frac{\pi}{2}\,,\; x = -\frac{\pi}{2}\,,\; y = 0$$

cuando los dos primeros se mantienen a la temperatura T_0 y el último



a T_1. La función $T(x, y)$ ha de estar acotada en todos los puntos de esta región, en particular cuando $y \to \infty$. Esta condición es consecuencia natural de que esta placa es el caso límite de otra de altura finita, cuyo contorno superior se mantiene a una temperatura fija cuando su altura aumenta.

Las condiciones de contorno son:

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = T_0$$

para toda y, $T(x, 0) = T_1$ para

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

El ser acotada $T(x, y)$ supone que $T \to 0$ cuando $y \to \infty$.

Por medio de una transformación conforme buscaremos una región plana en la que el problema sea lo suficientemente simple para que la función sea evidente.

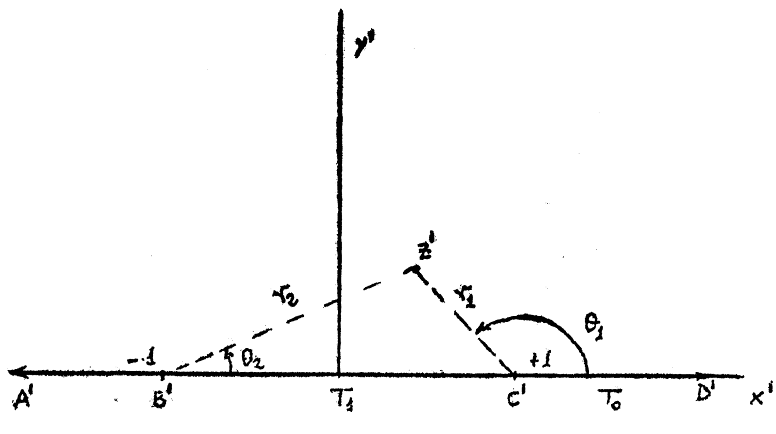
La transformación conforme $z' = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \operatorname{sen}(iy) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$, o sea, la transformación del plazo z en el z' viene dada por

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y \\ y' = \cos x \cdot \operatorname{sh} y \end{cases}$$

que transforma la región

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \; y > 0$$

en el semiplano superior $y' > 0$.



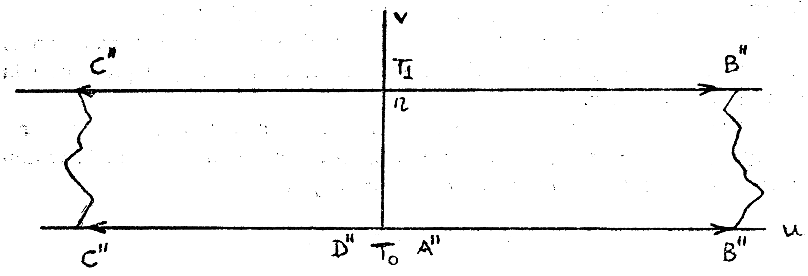
La base de la placa se ha transformado en el segmento comprendido entre $z' = -1$ y $z' = 1$. Aplicando a este semiplano una nueva transformación conforme

$$w = \mathrm{L}n \frac{z' - 1}{z' + 1} = \mathrm{L}n \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \mathrm{L}n \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

o sea,

$$\begin{cases} u = \mathrm{L}n \dfrac{r_1}{r_2} \\ v = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

con lo que el recinto $y' \geqslant 0$, es decir, $r_1, r_2 \geqslant 0$, $0 < \theta_{1,2} < \pi$, se transformará en la banda indefinida: $-\infty < u < +\infty$, $0 < v < \pi$.



La función armónica buscada tomará el valor T_0 sobre la recta $v = 0$ y T_1 sobre la recta $v = \pi$, estando acotada en esa banda. Así, encontramos,

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\pi} v + T_0 \qquad [7]$$

función que es armónica en la banda antes definida. Esta dá lugar en el semiplano $y' \geqslant 0$ a la función en las variables x', y'

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1} \right) + T_0 \qquad [8]$$

Deshaciendo la transformación $z' = \operatorname{sen} z$, la función [8] se escribirá:

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y - 1} \right) + T_0 =$$

$$\frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x} \right) + T_0 =$$

$$= \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos x / \operatorname{sh} y}{1 - (\cos x / \operatorname{sh} y)^2} + T_0$$

si se tiene presente que aquí

$$\operatorname{tag} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

tomando

$$\operatorname{tag} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}$$

se obtiene la función de distribución de temperaturas en la placa.

$$\boxed{T = 2 \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,tag} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y} \right) + T_0} \qquad [9]$$

Por ser sen z analítica, garantiza que [9] será armónica en la placa Además, $|T(x, y)| \leqslant T_1$, satisfaciendo las condiciones de contorno.

Las isotermas son las curvas

$$\cos x = \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{tag} \frac{\pi C}{2(T_1 - T_0)}$$

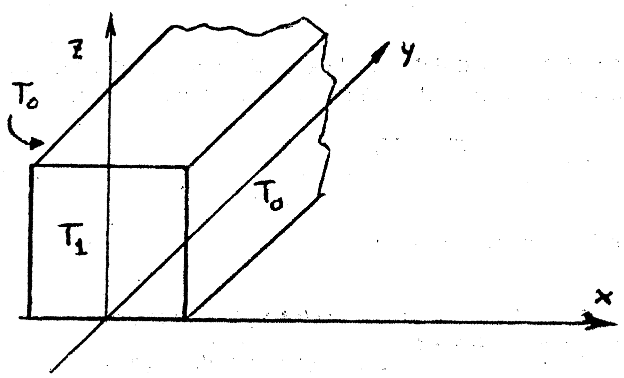
que pasan por los puntos

$$\left(\pm \frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

El flujo térmico lo calcularemos a partir del gradiente de temperatura.

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} T} = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} =$$

$$= \frac{-2 (T_1 - T_0)}{\pi(\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x)} (\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y \, \vec{i} + \cos x \operatorname{ch} y \, \vec{j} \,)$$



Particularizando obtendremos los flujos caloríficos para cada plano. Para el plazo XZ se tiene:

$$\dot{Q} = -\lambda\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}\ T})_{y=0} = \frac{2\lambda(T_1 - T_0)}{\pi \cos x}$$

el flujo que entra por la base de la placa. El saliente por el plano

$$x = \frac{\pi}{2}$$

es

$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\lambda(T_1 - T_0)}{\pi\,\mathrm{sh}\, y}$$

Con relativa frecuencia, distribuciones de temperatura para situaciones de material y condiciones iniciales diferentes dan lugar, por medio de adecuadas transformaciones conformes, a casos ya conocidos. A continuación veremos un ejemplo. El recinto viene determinado por las condiciones: $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $y \geqslant 0$. Las condiciones de contorno del problema son: $T(x, 0) = T_0$ para $|x| < 1$; $T(x, y) = T_1$ para $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $y \neq 0$.

Por medio de la transformación conforme

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = u + iv$$

o sea,

$$u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right),\ v = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

se pasa al recinto $v \geqslant 0$ del caso de una placa semi-infinita, con análogas condiciones de contorno. Por ello la función buscada será [8]:

$$T(u, v) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}\right) + T_0$$

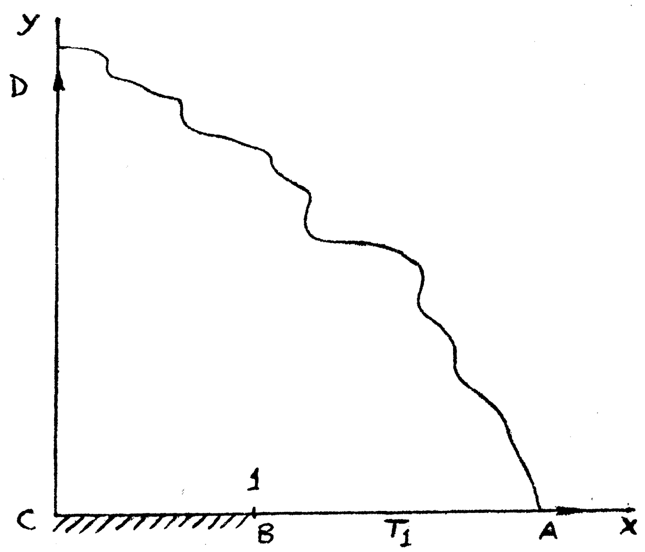
pasando a las cordenadas originales,

$$\boxed{T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{4y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2+1)+y(x^2+y^2-1)-4}\right] + T_0} \quad [10]$$

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN UN CUADRANTE CON UNO DE SUS LADOS AISLADOS PARCIALMENTE.

El problema queda esquematizado en la figura adjunta.

El segmento aislado es el CB y las demás porciones del contorno son ilimitadas y mantenidas a las temperaturas señaladas. La ecuación de



Laplace debe ser resuelta de acuerdo a las condiciones de contorno siguientes:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

en el intervalo $0 < x < 1$, correspondiente al segmento aislado. También las otras partes del contorno dan origen a las condiciones; $T(x, 0) = T_1$ para todos los valores de $x \geqslant 1$ y $T(0, y) = T_0$ para $y \geqslant 0$, debiendo estar $T(x, y)$ acotada para todos los valores positivos de x e y.

La transformación $z = \operatorname{sen} w$, aplica el cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ en la banda semi-infinita

$$0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}, \; v \geqslant 0$$

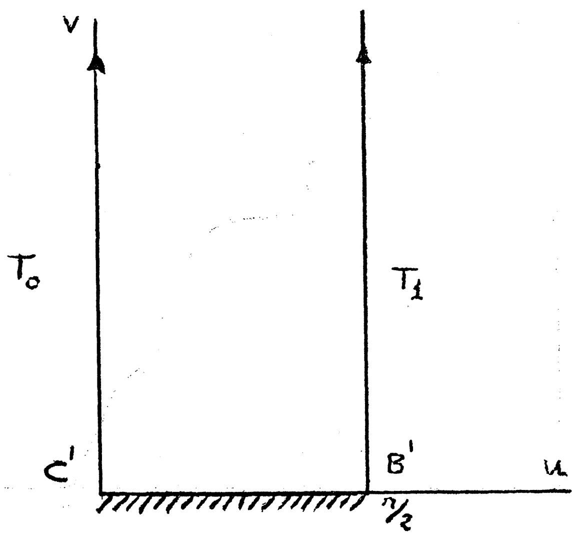
puesto que $z = \operatorname{sen} w$ es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{ch} v \\ y &= \cos u \cdot \operatorname{sh} v \end{aligned}\right\} \qquad [11]$$

Las condiciones de condiciones de contorno expresadas en el plano u, v son: $T(u, v) = T_0$ sobre la recta $u = 0$, $T(u, v) = T_1$ en la recta

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ y } \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{v=0} = 0$$

en el segmento homólogo C'B'. La función de distribución, además, deberá estar acotada en la banda considerada.



$$T(u, v) = (T_1 - T_0)\frac{2u}{\pi} + T_0 = Re\left[\frac{2}{\pi}(T_1 - T_0)\,w\right] + T_0 \quad [12]$$

Apliquemos de modo inverso el cambio de variables [11] para obtener la función de distribución en las cordenadas x, y. Para ello, de [11] se obtiene:

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$$

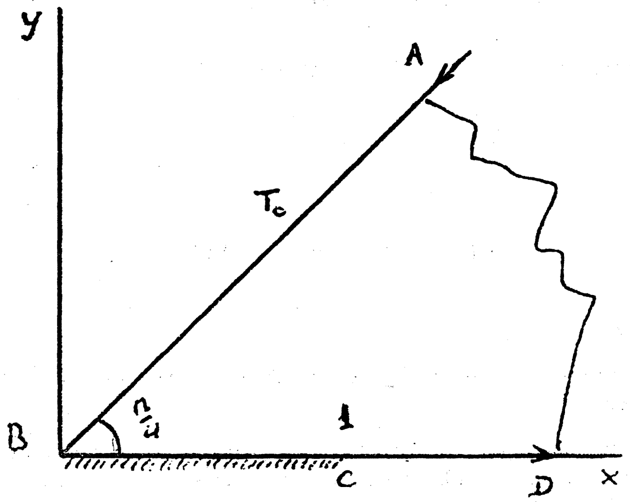
y despejando,

$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right]$$

sustituyendo en [12], la función buscada será:

$$\boxed{T(x, y) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right] + T_0} \quad [13]$$

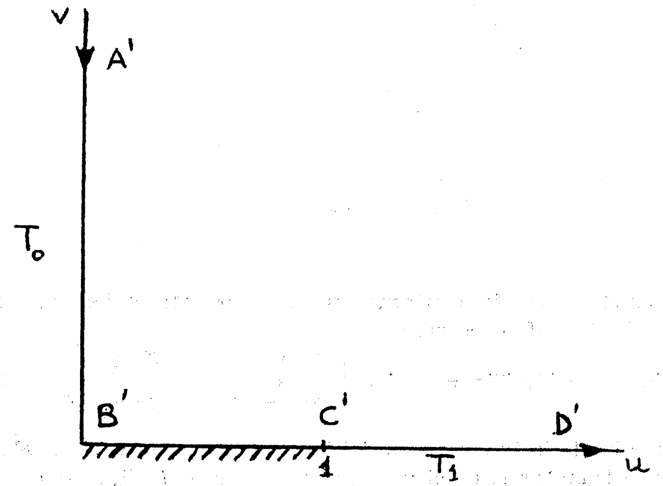
Otro caso particular, que se reduce al estudiado, es el siguiente: La distribución de temperaturas en una cuña aislada en parte de su perímetro. La situación se refleja en la figura adjunta. El recinto es el de-



terminado por $x \geqslant 0$, $y \leqslant x$. Las condiciones de contorno para $t(x, y)$ son: $T(x, x) = T_0$ para $x > 0$, $T(x, 0) = T_1$ para $x > 1$ y

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

para $x < 1$. Por medio de la función $w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, el recinto dado se transforma en el semiplano $u \geqslant 0$, y condiciones de con-



torno análogas a las del cuadrante con parte de su perímetro aislado. En este caso la función $T(u, v)$ buscada será la [13], es decir,

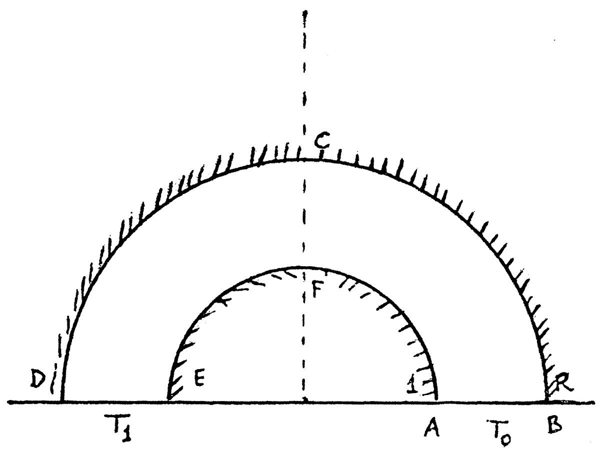
$$T(u, v) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \text{ arc sen } \frac{1}{2}\left[\sqrt{(u+1)^2 + v^2} - \sqrt{(u-1)^2 + v^2}\right] + T_0$$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene:

$$\boxed{T(x, y) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \text{ arc sen } \frac{1}{2}\left[\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} - \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}\right] + T_0} \qquad [14]$$

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN UNA BARRA CURVADA DE BORDES AISLADOS.

La situación queda reflejada en la figura. La sección de la barra forma una corona circular de perímetros aislados y extremos sometidos a diferentes temperaturas. La simetría del problema aconseja la utilización de la ecuación de Laplace en forma polar [6]:

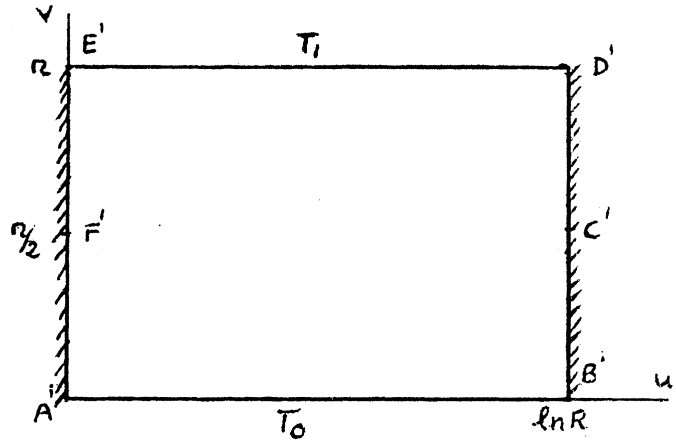


Las condiciones de contorno, para el recinto determinando por $1 < r < R$, $0 < \theta < \pi$, son:

$$T(r, 0) = T_0;\ T(r, \pi) = T_1;\ \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=1} = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$$

Por medio de la función $w = ln(z) = ln(r) + i\theta = u + iv$, el recinto señalado se transforma en el rectángulo: $0 < u < ln\ R$, $0 < v < \pi$. En donde la distribución $T(u, v)$ está sujeta a las condiciones: $T(u, v) = T_0$, $T(u, \pi) = T_1$ y

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{u=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{u=ln\ R} = 0$$



$T(u, v)$ será la función

$$\frac{v}{\pi}(T_1 - T_0) + T_0$$

que, escrita en las cordenadas originales, es

$$\boxed{T(r, \theta) = \frac{\theta}{\pi}(T_1 - T_0) + T_0} \qquad [15]$$

acotada para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. En cordenadas cartesianas,

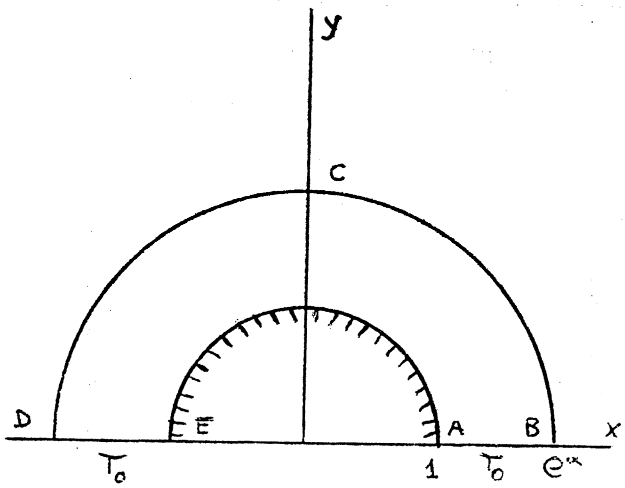
$$\boxed{T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \text{ arc tag} \frac{y}{x} + T_0} \qquad [16]$$

Como caso particular, podemos considerar el de una barra como la anteriormente estudiada, en la cual sólo uno de sus bordes está aislado y sus extremos mantenidos a la misma temperatura.

En cordenadas polares, el recinto viene determinado por $1 < r < e^{\alpha}$; $0 < \theta < \pi$. Las condiciones de contorno serán: $(T, r\ 0) = T_0$, $T(l, \pi) = T_0$,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=1} = 0, \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=e^{\alpha}}$$

proporcional a sen θ.



Por medio de la transformación $w = ln(z)$, pasamos al recinto rectangular señalado para el caso anterior, con la única variación de que el lado B′ C′ D′ no está aislado. Las condiciones de contorno quedan en las nuevas cordenadas: $T(u, 0) = T_0$, $T(u, \pi) = T_0$,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{u=0} = 0 \text{ y } \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{u=\alpha}$$

proporcional a sen v. En estas condiciones la función de distribución buscada es:

$$T(u, v) = \frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} (e^{u} + e^{-u}) \operatorname{sen} v + T_0$$

$$T(r, \theta) = \frac{e^{2\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \left(r + \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen} \theta + T_0$$

en cordenadas polares, [17]

$$T(x, y) = \frac{e^{2\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + T_0$$

en cartesianas [18]

PLACA INDEFINIDA CON DOS LADOS A TEMPERATURA CONSTANTE.

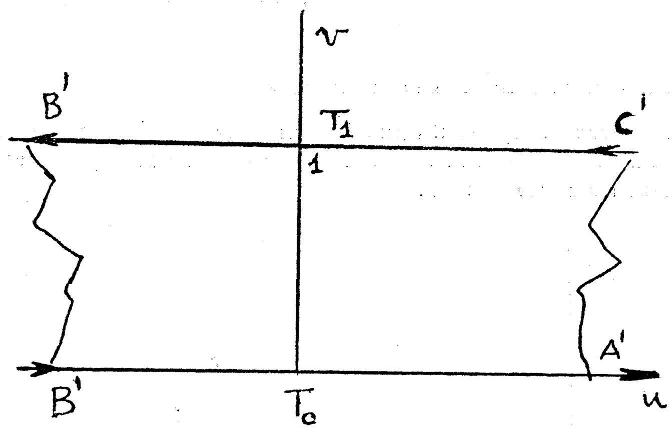
El recinto es el primer cuadrante del plano complejo, y las condiciones de contorno,

$$T(x, 0) = T_0,\ T(0, y) = T_1,\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\infty} = 0,\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=\infty} = 0$$

La función

$$w = \frac{2}{n} ln(z) = \frac{2}{n} ln(r) + i \frac{2\theta}{\pi} = u + iv$$

que es conforme, lo transforma en el recinto del plano w constituido por una banda infinita de anchura unidad.



La función que se busca, $T(u, v)$, deberá satisfacer las condiciones de contorno:

$$T(u, 0) = T_0, \ T(u, 1) = T_1; \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{v=\infty} = 0, \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{v=-\infty} = 0$$

y ser acotada en el recinto. Esa función es:

$$T(u, v) = (T_1 - T_0)\, v + T_0 = v = Im(w)$$

deshaciendo el cambio de variables

$$\boxed{T(x, y) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \text{ arc tag } \frac{y}{x} + T_0} \qquad [19]$$

Las temperaturas de las zonas situadas a distancia suficientemente grande de los bordes serán: $T(x, \infty) = T_1$, $T(\infty, y) = T_0$. Las isotermas $T(x, y) =$ cte, son las rectas del haz de vértice en el origen:

$$y = \text{tag} \frac{\pi \cdot \text{cte}}{2(T_1 - T_0)}$$

El flujo de calor, según los bordes de la placa no aislados,

$$\overrightarrow{\text{grad T}} = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi(x^2 + y^2)} (x \vec{i} - y \vec{j})$$

y según los planos cordenados:

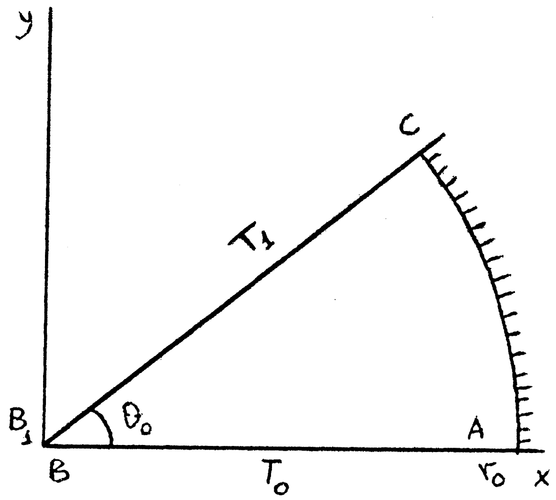
$$-\frac{2(T_1 - T_0)k}{\pi x} \text{ para } Y = 0$$

y

$$\frac{2(T_1 - T_0)k}{\pi y} \text{ para } X = 0.$$

CUÑA CILÍNDRICA PARCIALMENTE AISLADA

En la figura se representa una sección de la cuña, que tiene longitud indefinida, los lados planos a temperatura constante y la superficie curva térmicamente aislada.



El recinto viene dado por: $0 < r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Las condiciones de contorno para la función $T(r, \theta)$ son: $T(r, 0) = T_0$, $T(r, \theta_0) = T_1$;

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0$$

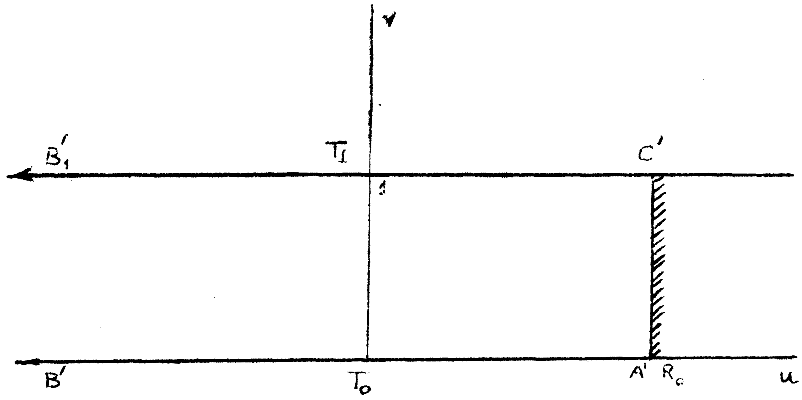
Por medio de la función

$$w = \frac{1}{\theta_0} ln(z) = \frac{1}{\theta_0} ln(z) + i \frac{\theta}{\theta_0} = u + iv$$

el recinto dado se transforma la banda semi-infinita

$$-\infty < u \leqslant \frac{1}{\theta_0} ln(r_0) = R_0,\ 0 \leqslant v \leqslant 1$$

representado en la figura siguiente:



Para la nueva función las condiciones de contorno son:

$$T(u, 0) = T_0,\ T(u, 1) = T_1\ (u < R_0);\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{u=R_0} = 0$$

Estas son satisfechas por $T(u, v) = (T_1 - T_0)\, v + T_0$, que en el plano z es:

$$\boxed{T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\theta_0} \operatorname{arc\,tag} \frac{y}{x} + T_0} \qquad [20]$$

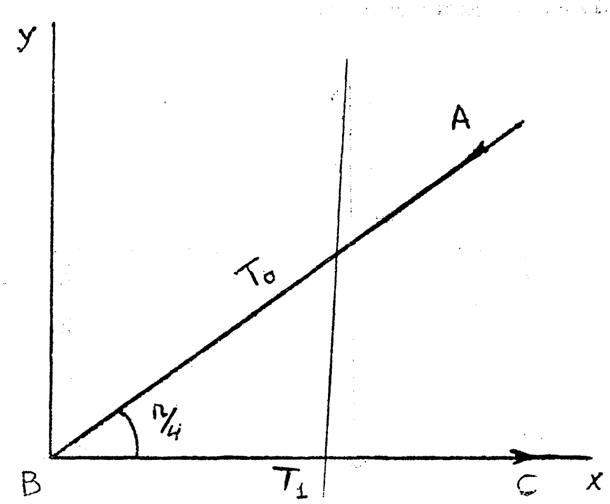
En lo que sigue se analizan algunos problemas que, mediante una transformación conforme adecuada, se convierten en un caso particular del que acabamos de estudiar.

a) *Cuña indefinida de contornos planos a temperaturas constantes.*

El recinto viene determinado por: $x \geqslant 0$, $y \leqslant x$, y las condiciones de contorno; $T(x, x) = T_0$ para $x > 0$, $T(x, 0) = T_1$ para $x > 0$.

Mediante la función $w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$, el recinto se transforma en el primer cuadrante del plano w. Situación totalmente análoga a la estudiada, referente a una placa indefinida con dos lados a temperaturas fijas. La función de distribución [19] es:

$$T(u, v) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \operatorname{arc\,tag} \frac{v}{u} + T_0$$



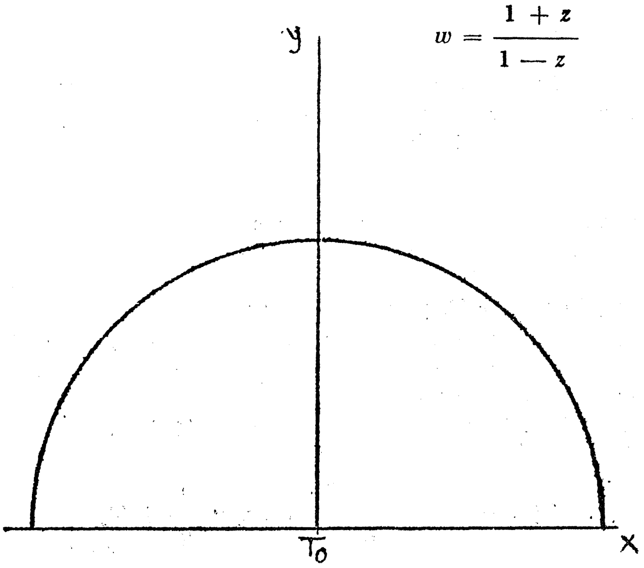
que en cordenadas cartesianas se escribirá:

$$\boxed{T(x, y) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \operatorname{arc\,tag} \frac{2xy}{x^2 - y^2} + T_0} \qquad [21]$$

b) *Semicírculo con bordes a temperaturas constantes.*

El recinto está determinado por: $r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, en cordenadas polares. Las condiciones de contorno del problema son: $T(1, \theta) = T_1$, $T(r, 0) = T(r, \pi) = T_0$. Mediante la función

$$w = \frac{1 + z}{1 - z}$$



El recinto se transforma en el primer cuadrante del plano w. Aplicando los resultados de la página 26, la distribución buscada será [19], que, en cordenadas polares, será:

$$\boxed{T(r, \theta) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \text{ arc tag } \frac{2r \text{ sen } \theta}{1 - r^2} + T_0} \qquad [22]$$

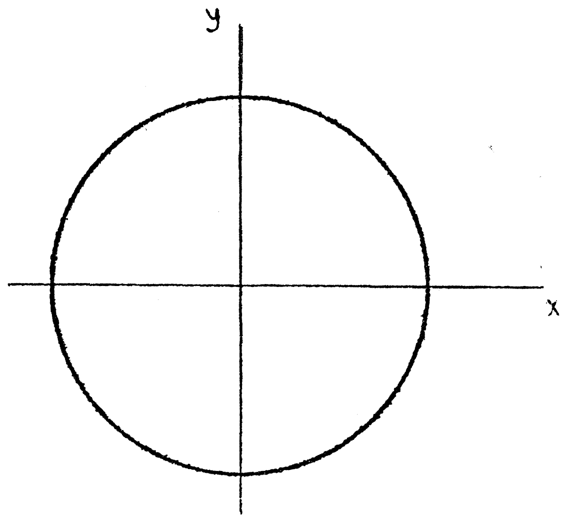
acotada para $0 \leqslant \theta \leqslant n$.

c) *Disco completo.*

El recinto es el círculo de radio unidad, $r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Y las condiciones de contorno son: $T(1, \theta) = T_0$, para $0 < \theta < n$, $T(1, \theta) = T_1$ para $\pi < \theta < 2\pi$. La función

$$w = \frac{i(1 - z)}{1 + z} = \frac{2r \text{ sen } \theta}{1 + r^2 + 2r \cos \theta} + i \frac{1 - r^2}{1 + r_2 + 2r \cos \theta} = u + iv$$

transforma el círculo en el semiplano superior del plano w, que en po-



lares se expresa $\rho \leqslant 0$, $0 \leqslant \Phi \leqslant n$. Otra nueva transformación, la de terminada por la función

$$\omega = w^{1/2} = \rho^{1/2} e^{i\Phi/2} = u' + iv' = \rho^{1/2} \cos \frac{\Phi}{2} + i\rho^{1/2} \text{ sen } \frac{\Phi}{2}$$

que, en definitiva, nos lleva al cuadrante del plano ω;

$$R \geqslant 0, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

La distribución $T(u', v')$ vendría dada por [19]. Por medio de las relaciones

$$u' = R\cos\psi = \rho^{1/2}\cos\frac{\Phi}{2} = (u^2 + v^2)^{1/4}\cos\frac{1}{2}\left[\text{arc tg}\frac{v}{u}\right] =$$

$$= (u^2 + v^2)^{1/4}\cos\frac{1}{2}\left[\text{arc tg}\frac{1 - r^2}{2r \operatorname{sen}\theta}\right]$$

y de forma análoga para v' se obtiene la función de distribución en el disco:

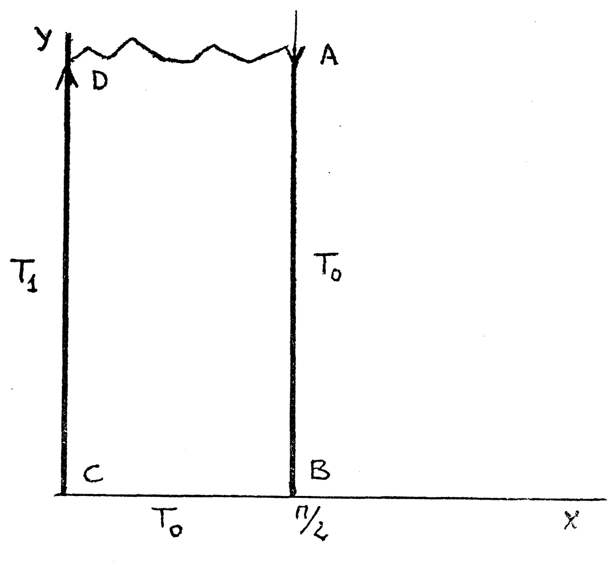
$$\boxed{T(r, \theta) = \frac{T_1 - T_0}{\pi}\,\text{arc tag}\,\frac{1 - r^2}{2r \operatorname{sen}\theta} + T_0} \qquad [23]$$

d) *Pared plana sin aislar.*

La diferencia con el caso estudiado anteriormente es que la pared o banda semi-infinita no tiene su base aislada, sino a temperatura fija. El recinto responde a las condiciones,

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \; y > 0$$

y a las de contorno: $T(0, y) = T_1$, $T(\pi/_2, y) = T_0$, $T(x, 0) = T_0$. Por medio de la función $w = \operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)\, ch(y) + i \cos(x)\, sh(y) = u + iv$. transformamos el recinto dado en el primer cuadrante del plano w,



cuya función de distribución es la [19]; teniendo presente que $u = \operatorname{sen}(x)\operatorname{ch}(y)$, $v = \cos(x)\operatorname{sh}(y)$ se obtiene finalmente:

$$\boxed{T(x, y) = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \operatorname{arc\,tag} \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{tg} x} + T_0} \qquad [24]$$

que cumple las condiciones de contorno y además $0 \leqslant T(x, y) \leqslant 1$.
Los flujos caloríficos según los planos cordenados son:
Puesto que,

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} T} = \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi}\left[-\frac{\operatorname{th} y(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{th}^2 y}\vec{i} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ch}^2 y \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{th}^2 y}\vec{j}\right]$$

para

$$x = 0 \qquad \dot{Q} = \frac{2\,k(T_1 - T_0)}{\pi \operatorname{th} y}$$

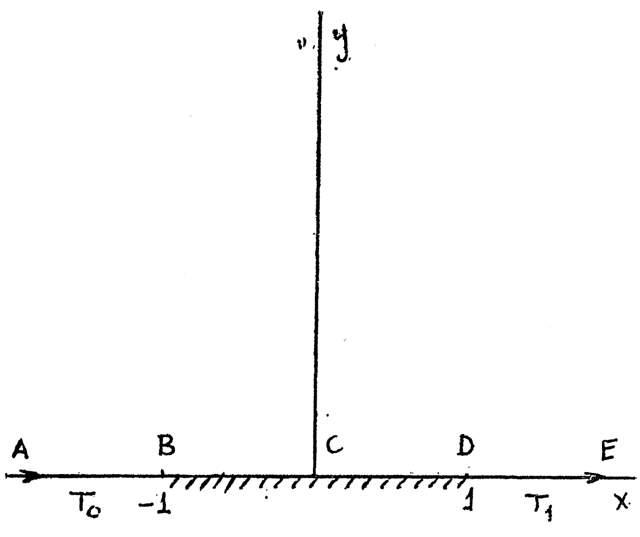
para

$$y = 0 \qquad \dot{Q} = -\frac{2\,k(T_1 - T_0)}{\pi \operatorname{tg} x}$$

Distribución en un sólido semi-infinito con parte de su contorno aislada.

El recinto es el semiplano positivo del plano z, y las condiciones de contorno son: $T(x, y) = T_0$, para $x < -1$ y $T(x, y) = T_1$ para $x > 1$. Junto con la condición de aislamiento en

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$



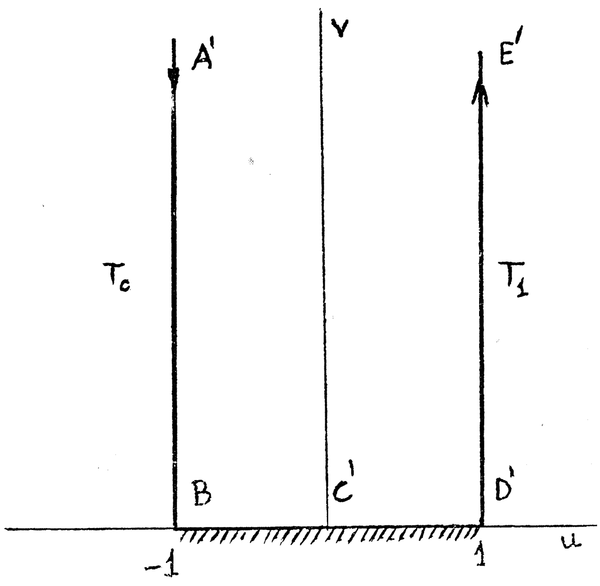
La transformación

$$z = \operatorname{sen} \frac{\pi w}{2} = x + iy$$

o lo que es igual,

$$x = \operatorname{sen} \frac{\pi u}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi v}{2}, \; y = \cos \frac{\pi u}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi v}{2}$$

aplica el recinto dado en la banda semi-infinita: $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $v \geqslant 0$.



La función $T(u, v)$ deberá satisfacer las nuevas condiciones de contorno: para $v \geqslant 0$, $T(-1, v) = T_0$, $T(1, v) = T_1$ y

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{v=0} = 0$$

para $-1 \leqslant u \leqslant 1$; estar acotada en la banda. La función buscada será:

$$T(u, v) = (T_1 - T_0) \frac{u + 1}{2} + T_0$$

teniendo presente que:

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi u}{2}} - \frac{y^2}{\cos^2 \dfrac{\pi u}{2}} = 1$$

o sea,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi u}{2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right]$$

por lo que la función de distribución buscada será:

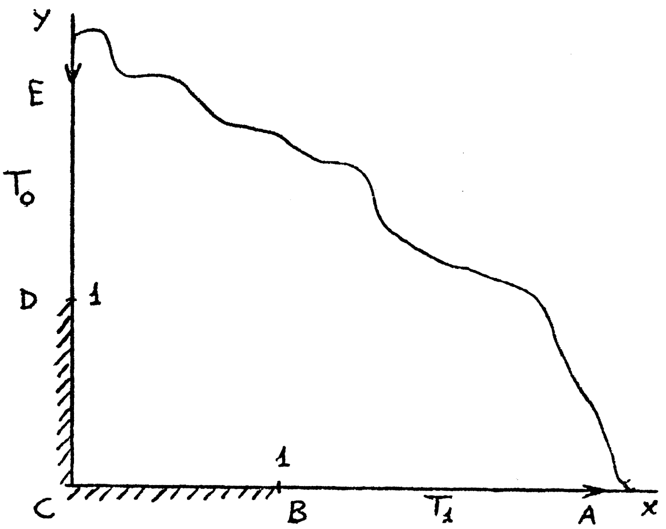
$$T(x, y) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right] \qquad [25]$$

Este problema permite resolver otros que, mediante la transformación adecuada, se reducen al mismo. Veamos a continuación algunos ejemplos.

a) *Cuadrante con dos bandas aisladas de igual anchura.*

El recinto es el primer cuadrante del plano z, con dos zonas aisladas térmicamente de anchura unidad. Las condiciones de contorno a



que debe satisfacer la función de distribución son: $T(x, 0) = T_1$ para $x \geqslant 1$, $T(0, y) = T_0$ para $y \geqslant 1$, además

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \text{ para } y < 1; \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \text{ para } x < 1.$$

La función conforme $w = z^2 = r^2 e^{i2\theta} = \rho\, e^{i\Phi} = x' + iy'$, transforma el recinto anterior en el $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \Phi \leqslant \pi$, que corresponde al caso anterior. $T(x', y')$ vendrá dada por [25], que escrita en polares ($x' = r^2 \cos 2\theta$, $y' = r^2 \operatorname{sen} 2\theta$)

$$T(r, \theta) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} \left[\sqrt{r^4 + 2 r^2 \cos 2\theta + 1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{r^4 - 2 r^2 \cos 2\theta + 1} \right]$$

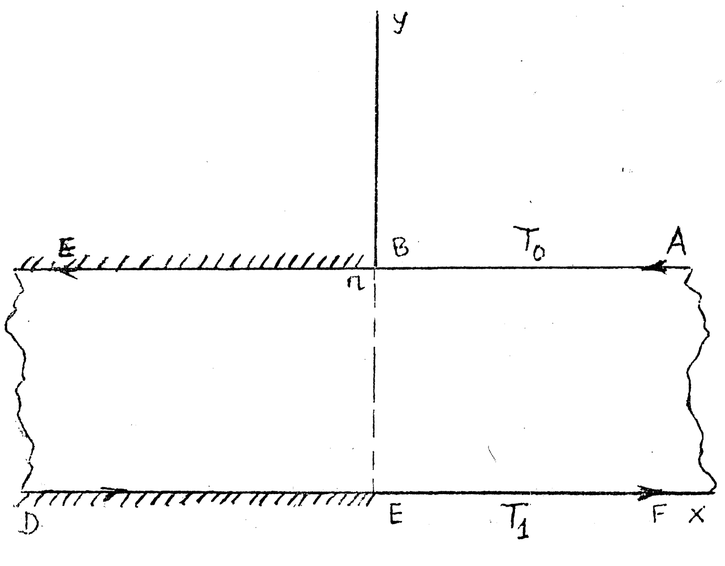
que en cordenadas cartesianas es,

$$\boxed{T(x, y) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4 x^2 y^2} - \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4 x^2 y^2} \right]} \quad [26]$$

b) *Placa infinita con dos mitades ausladas.*

La figura representa una sección renta de la placa infinita, que corresponde a la banda $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Las condiciones de contorno en ella son: para $x > 0$, $T(x, 0) = T_1$ y $T(x, \pi) = T_0$;

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \text{ para } x < 0.$$

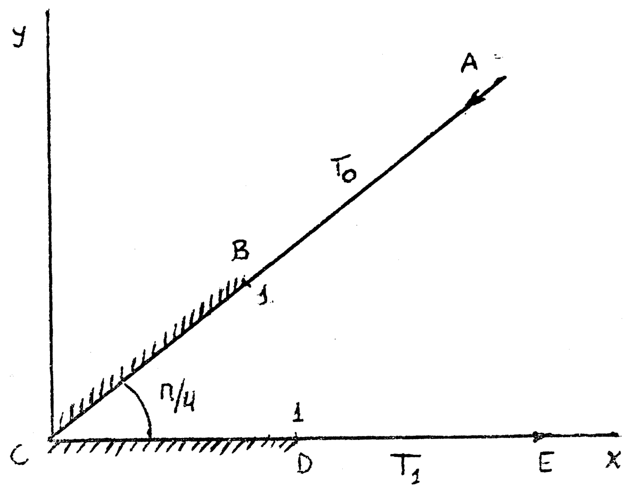


La transformación conforme $w = e^z = e^x e^{iy} = \rho\, e^{i\Phi}$ convierte el problema en el anteriormente considerado, cuya función de distribución es la [25]. Teniendo presente que en la función T(u, v) obtenida debe realizarse el cambio: $u = \rho \cos \Phi = e^x \cos y$; $v = \rho \operatorname{sen} \Phi = e^x \operatorname{sen} y$, obteniéndose definitivamente,

$$\boxed{T(x, y) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} \left[\sqrt{e^{2x}(1 + 2\cos y) + 1} - \sqrt{e^{2x}(1 - 2\cos y) + 1}\right]} \qquad [27]$$

c) *Cuña con dos bandas aisladas.*

Supongamos que el ángulo de la cuña es $\pi/_4$, y las demás condiciones, las señaladas en la figura. Mediante la función $w = z^2 = r^2 e^{i2\theta} = \rho\, e^{i\Phi}$, se reduce al caso a), cuya función de distribución es [26]. Pasando a cordenadas cartesianas por medio de las relaciones: $u = \rho \cos \Phi =$



$= r^2 \cos 2\theta = x^2 - y^2$, $v = \rho \operatorname{sen} \Phi = r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2xy$, queda la función de distribución

$$\boxed{\begin{aligned} T(x, y) = {} & \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} \\ & \Big[\sqrt{(x^4 + y^4 - 6\,x^2 y^2 + 1)^2 + 16\,(x^3 y - xy^3)^2} \; - \\ & - \sqrt{(x^4 + y^4 - 6\,x^2 y^2 - 1)^2 + 16\,(x^3 y - xy^3)^2}\,\Big] \end{aligned}} \qquad [28]$$

BIBLIOGRAFIA

A. Kaufmann y R. Douriaux: *Funciones de variable compleja* (1973).

G. Valiron: *Theorie des Fonctions* (1966).

R. V. Churchill: *Teoria de funciones de variable compleja* (1965).

L. I. Volkovski: *Problemas sobre teoria de funciones de variable compleja* (1972).