SOBRE EL LIMITE INDUCTIVO DE LOS ESPACIOS H(r), r < R Y EL LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS H[r], r < R

por

J. Prada Blanco

INTRODUCCION

Consideramos los espacios $H(r)$ y $H[r]$, $r < R$

$$H(r) = \{a \in C^N / \Sigma\, |a_n| \cdot e^{-\lambda_n r'} < \infty \,,\ \forall\, r' > r\}$$

$$H[r] = \{b \in C^N / \exists\, r' > r \,,\ \exists\, n_0 \in N / |b_n| \leqslant e^{-\lambda_n r'} \,,\ \forall\, n \geqslant n_0\}$$

siendo (λ_n) una sucesión de números reales, estrictamente creciente y no acotada. Suponemos $\lambda_0 \geqslant 0$.

En este trabajo estudiamos el límite inductivo de los espacios $H(r)$, $r < R$ y el límite proyectivo de los espacios $H[r]$, $r < R$, generalizando los resultados encontrados en un trabajo anterior («Series de Dirichlet consideradas como espacios de sucesiones», *Collectanea Mathematica*, Barcelona, 1977).

LIMITE INDUCTIVO DE LOS ESPACIOS H(r), r < R Y LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS H[r], r < R

Sea R un número real. Consideremos los espacios $H(r)$ tal que $r < R$. Sabemos que el límite inductivo de los espacios $H(r)$, $r < R$ es igual a

$$\bigcup_{r < R} H(r)$$

Proposición 1.

$$\bigcup_{r < R} H(r) = H[-R] \,,\ \text{si } e^{-\lambda_n \varepsilon} \in l^1 \,,\ \forall\, \varepsilon > 0$$

Demostración:

a) $\bigcup_{r < R} H(r) = H[-R]$

$$a \in \bigcup_{r < R} H(r) \Rightarrow \Sigma\, |a_n| \cdot e^{-\lambda_n r'} < \infty \,,\ \forall\, r' > r_1,\ r_1 < R$$

Sea $p / r_1 < p < R$.
Entonces

$$|a_n| \leqslant M\, e^{\lambda_n p}\ ,\ \forall\ n \in N \Rightarrow a \in H[-R]$$

b) $H[-R] \subset \bigcup\limits_{r < R} H(r)$

$a \in H[-R] \Rightarrow$

$$|a_n| \leqslant e^{-\lambda_n r'}\ ,\ \forall\ n \geqslant n_0\ ,\ r' > -R$$

Sea x tal que $R > x > -r'$, entonces

$$a \in H[-x] \Rightarrow a \in \bigcup_{r < R} H(r)$$

LÍMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS $H[r]$, $r < R$

Considerando los espacios $H[r]$, $r < R$ y las aplicaciones canónicas inclusión $I_{r_1 r_2} : H[r_2] \longrightarrow H[r_1]$, $r_1 < r_2$, tenemos que el límite proyectivo de los espacios $H[r]$, $r < R$ es igual a

$$\bigcap_{r < R} H[r]$$

Proposición 2

$$\bigcap_{r < R} H[r] = H(-R),\ \text{si}\ e^{-\lambda_n \varepsilon} \in 1^1\ ,\ \forall\ \varepsilon > 0$$

LÍMITE PROYECTIVO TOPOLÓGICO DE LOS ESPACIOS $H[r]$, $r < R$

Sea $e^{-\lambda_n \varepsilon} \in 1^1$, $\forall \in > 0$.
Tomemos los espacios $H[r]$, $r < R$ con la topología normal.
La topología del límite proyectivo de los espacios $H[r]$ tiene una base de entornos del origen dada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $M_r \cap H(-R)$, donde M_r es un entorno absolutamente convexo del origen en $H[r]$, siempre que las aplicaciones $I_{r_1 r_2} : H[r_2] \longrightarrow H[r_1]$, $r_1 < r_2$ sean continuas.

Proposición 3

Las aplicaciones $I_{r_1 r_2}$: $H[r_2] \longrightarrow H[r_1]$, $r_1 < r_2$ son continuas.

Proposición 4

$H(-R)$ con la topología normal es el límite proyectivo topológico de los espacios $H[r]$ con la topología normal.

Demostración:

a) La topología normal de H(—R) es más fina que la topología del límite proyectivo.
H(—R) $\subset$ H[r] , $\forall\, r <$ R, con lo que la topología normal de H[r], $r <$ R induce en H(—R) una topología Δ menos fina que $\Delta_{H(-R)}$.
Sea $(M_{r_1} \cap H(-R)) \cap (M_{r_2} \cap H(-R)) \cap \ldots\ldots\ldots \cap (M_{r_n} \cap H(-R))$ un entorno del origen en la topología del límite proyectivo.
$M_{r_1} \cap H(-R)$ es un entorno del origen en la topología inducida en H(—R) por la topología de H[r_1] $\Longrightarrow$ es un entorno del origen en la topología normal de H(—R).
Análogamente, $M_{r_2} \cap H(-R) \ldots\ldots\ldots M_{r_n} \cap H(-R)$.

b) La topología del límite proyectivo es más fina que la normal de H(—R).
Sea $U = \{a \in H(-R)/\Sigma\, |u_n|\, |a_n| \leqslant \varepsilon\, ,\, u > 0\, ,\, u \in H[-R]\}$
$u \in H[-R] \Longrightarrow \exists\, r' < R/u \in H(r')$.
Tomemos $U' = \{a \in H[r']/\Sigma\, |u_n|\, |a_n| \leqslant \varepsilon\, ,\, u > 0\, ,\, u \in H(r')\}$, $U =$ $= U' \cap H(-R) \Longrightarrow$ U es un entorno del origen en la topología del límite proyectivo.

LÍMITE INDUCTIVO TOPOLÓGICO DE LOS ESPACIOS H(r), $r <$ R

Sea $e^{-\lambda_n \varepsilon} \in l^1\, ,\, \forall\, \varepsilon > 0$.
Consideremos los espacios H(r), $r <$ R con la topología normal.

Proposición 5

H[—R] con la topología normal es el límite inductivo topológico de los espacios H(r) con la topología normal.

Demostración:

Si $E(\mathbf{I}) = \varprojlim A_{\alpha\beta}(F_\beta\, (\mathbf{I}_\beta))$ es un límite proyectivo topológico en forma reducida la topología $\theta_E{}'$ del dual es igual a la topología del límite inductivo topológico $\varinjlim A'_{\alpha\beta}(F'_\alpha\, (\theta_{F'_\alpha}))$.

Veamos, pues, que

$$(H(-R),\, \Delta_{H(-R)}) = \varprojlim I_{r_1 r_2}\, (H[r],\, \Delta H[r])$$

es un límite proyectivo en forma reducida.

En efecto:

$$H[r] \subset \overline{H(-R)}$$

$$x \in H[r] \Longrightarrow |x_n| \leqslant e^{-\lambda_n r'}\, ,\, r' > r\, ,\, n \geqslant n_0$$

Sea $V = \{a \in H[r]/\Sigma\, |u_n\, a_n| \leqslant \varepsilon\, ,\, u \in H(r)\}$.

Como $\Sigma \ |u_n \ x_n| < \infty$, tenemos $\sum_{N}^{\infty} |u_n \ x_n| \leqslant \varepsilon \, , \, n \geqslant N$.

Consideremos la sucesión:

$$a_n = \begin{cases} 0 \, , \, n \leqslant N \, , \, N \geqslant n_0 \\ -x_n \, , \, n > N \, , \, N \geqslant n_0 \end{cases}$$

Entonces, $x + a \in x + V$ y $x + a \in H(-R)$.

Proposición 6

El límite inductivo topológico de los espacios $H(r)$ no es estricto.

Demostración

Para que el límite inductivo topológico fuese estricto, haría falta que la topología normal de $H(r_2)$ indujera en $H(r_1)$ la topología normal de $H(r_1)$.

Esta condición no se cumple.

Sea $U(p, \varepsilon) = \{a \in H(r_1) / e^{-\lambda_n p} \ |a_n| \leqslant \varepsilon \, , \, r_1 < p \leqslant r_2\}$.

Sea $U(p', \varepsilon') = \{a \in H(r_2) / e^{-\lambda_n p'} \ |a_n| \leqslant \varepsilon', \ p' > r_2\}$.

Consideremos las siguientes sucesiones

$$x^K = (x_n^K) = \begin{cases} \varepsilon' \ e^{\lambda_n p'} & n = k \\ \varepsilon' \ e^{\lambda_n r_1} & n \neq k \end{cases}$$

$$x^K \in U(p', \varepsilon'), \ k = 0, 1, 2 \dots$$

Ahora bien, $x^K \notin U(p, \varepsilon)$, pues $\nexists \ \varepsilon' /$

$$\varepsilon' / \varepsilon \leqslant e^{-\lambda_n (p' - p)} \, , \, n \in N$$

NOTA.—La condición $e^{-\lambda_n \varepsilon} \in l^1 \, , \, \forall \ \varepsilon > 0$ es equivalente a la condición $\forall \ i \, , \, \exists \ j / e^{-\lambda_n (r_i - r_j)} \in l^1 \, , \, \forall \ r < R$ y $\forall \ r_i$, tal que $r_1 > r_2 > r_3 \dots \longrightarrow$ $\longrightarrow r$.

Proposición 7

Sea $r < R$. Supongamos que $\exists \ i / \forall \ j$, tengamos $e^{-\lambda_n (r_i - r_j)} \notin l^1$.

Entonces, $\bigcup_{r < R} H(r) \underset{\neq}{\subset} H[-R]$.

Demostración

La condición impuesta implica que $\exists \ \varepsilon > 0 / \forall \ \varepsilon' / 0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$, tenemos $\Sigma \ e^{-\lambda_n \varepsilon'} = \infty$.

Evidentemente, $\bigcup_{r < R} H(r) \subset H[-R]$.

Ahora bien, $\bigcup_{r<R} H(r) \neq H[-R]$.

En efecto:

Sea $a_n = e^{-\lambda_n(-R+\varepsilon)}$.
$a \in H[-R]$, pero $a \notin \bigcup H(r)$, $r < R$.
Supongamos que $a \in \bigcup H(r)$, $r < R \Rightarrow \exists\, r < R / a \in H(r) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma\, |a_n| \cdot e^{-\lambda_n r'} < \infty$, $\forall\, r' > r$.
Tomemos $r'/r < r' < R / |r' - R| < \varepsilon$.
Entonces, $\Sigma\, e^{-\lambda_n(r' + \varepsilon - R)} = \infty$, encontrándose una contradicción.

Proposición 8

$$\bigcup_{r<R} H(r) \neq H[x]\ ,\ x \neq R$$

Demostración

a) Sea $x < -R$.

$\bigcup_{r<R} H(r) = H[x] \Rightarrow H[-R] = H[r]$, lo cual no es posible.

b) Sea $x > -R$.

Sea p tal que $-x < p < R$.
Como $\lambda_n \to \infty$ existe una subsucesión, tal que $\lambda_{n_i} > i$, $i = 1, 2 \ldots$
Consideremos la sucesión

$$a_n = \begin{cases} 0\ ,\ n \notin \{n_i\} \\ e^{\lambda_{n_i} p}\ ,\ n \in \{n_i\} \end{cases}$$

$a_n \notin H[x]$, pero $a_n \in \bigcup H(r)$, $r < R$.
En efecto: $a \in H(p)$, pues

$$\Sigma\, e^{-\lambda_{n_i}(r' - p)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i(r' - p)} < \infty\ ,\ \forall\, r' > p.$$

Proposición 9

$$\bigcup_{r<R} H(r) \neq H(x)\ ,\ \forall\, x \in R.$$

NOTA.—Si dado $r < R$, $\exists\, i / \forall\, j$ tengamos $e^{-\lambda_n(r_i - r_j)} \notin l^1$, tenemos que el límite inductivo de los espacios $H(r)$, $r < R$ no es un espacio $H[x]$ ni un espacio $H(x)$ cualquiera que sea $x \in R$.

Proposición 10

Sea $r < R$. Supongamos que $\exists\ i/\forall\ j$, tengamos $e^{-\lambda_n(r_i - r_j)} \notin 1^1$.

$$\bigcap_{r<R} H[r] \neq H(x)\ ,\ \forall\ x \in R\ ,\ \bigcap_{r<R} H[r] \neq H[x]\ .\ \forall\ x \in R$$

NOTA.—Si dado $r < R$, $\exists\ i/\ \forall j$ tengamos $e^{-\lambda_n(r_i - r_j)} \notin 1^1$, tenemos que el límite proyectivo de los espacios $H[r]$, $r < R$ no es un espacio $H(x)$ ni un espacio $H[x]$ cualquiera que sea $x \in R$.

BIBLIOGRAFIA

1. BESICOVITCH, A. S.: *Almost Periodic Functions*, Cambridge at the University Press. Dover Publications, Inc. 1954.
2. CERDÁ MARTÍN, J. L.: «Dualidad de Köthe y funciones analíticas», *Collectanea Mathemática*, volumen XXII, 157-189. Barcelona, 1971.
3. DIEUDONNE, J.: «Sur les espaces de Köthe», *J. Analyse Math.*, 81-115. 1951.
4. FREMLIN, D. H.: «On Köthe spaces». Dissertation. Cambridge, 1966.
5. GARLING, D. J. H.: «On topological sequence spaces», *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 997-1019. 1967.
6. GARLING, D. J. H.: «The β -and γ-duality of sequence spaces», *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 963-981. 1967.
7. HARDY, G. H. and RIESZ, MARCEL: «Dirichlet Series». Stechert-Hafner Service Agency. New York and London, 1964.
8. KOMURA, T. and KOMURA, Y.: «Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations», *J. Math. Soc. Japan*, **15**, 319-338. 1963.
9. KÖTHE, G.: «Topological Vector Spaces I». Springer-Verlag. Berlín. Heidelberg. New York, 1969.
10. MANDELBROJT, S.: «Series adhérentes. Regularisation des suites. Applications». Gauthiers-Villars. 1952.
11. PIETSCH, A.: «Nuclear Locally Convex Spaces». Springer-Verlag. Berlín. Heidelberg. New York. 1972.
12. SARGENT, W. L. C.: «Some sequence spaces related to the l^p spaces», *J. London. Math. Soc.*, **35**, 161-171. 1960.
13. TOEPLITZ, O.: «Die linearen vollkommenen Räume del Funktiotionentheorie», *Comm. Math. Hel.*, **23**, 222-242. 1949.
14. TORT PINILLA, M.: «Consideraciones sobre la topologia normal en los espacios de Köthe», *Actas de las primeras jornadas matemáticas luso-españolas*, 203-216. 1973.