«ESTRUCTURA Y CLASIFICACION DE SEMIGRUPOS Tn, III: SEMIGRUPOS T4»

por

ALEJANDRO B. ENCEL

INTRODUCCION

Basado en el trabajo de O. Ore (6), D. Tamari (7) definió una clasificación de semigrupos, con un concepto generalizado de grado, para ofrecer una condición suficiente para la inmersión de un anillo de semigrupo en un cuerpo de cocientes. Explícitamente, la clasificación de Tamari consiste en definir clases cada vez más restringidas de semigrupos del modo siguiente:

Un semigrupo S es de clase TN (o semigrupo TN) si para cada $\alpha < S'(\alpha < S \Longleftrightarrow \alpha \subset S, \alpha$ finito), con $|\alpha| = n$ existe $\gamma < S$, tal que $|\alpha\gamma| < 2|\gamma|$.

No es difícil ver que si un semigrupo es un semigrupo TN, también es un semigrupo TM para todo M $\leqslant$ N. Sin embargo (1), la aserción inversa, o sea, la referente a la inductividad de la propiedad TN, no ha sido aún decidida. Más detalles, sobre esta teoría de semigrupos TN, pueden ser hallados en las referencias (1) a (5).

En un artículo previo (3), los semigrupos T3 fueron caracterizados; esta caracterización fue básica para la construcción de una clase de semigrupos T2 y no T3 (4). En el presente artículo caracterizaremos los semigrupos T4, con lo cual pretendemos futuramente, o construir clases de semigrupos T3 y no T4, o demostrar que todo semigrupo T3 es también un semigrupo T4. Como anteriormente mencionamos, la inductividad de la propiedad Tn es aún un problema abierto en la teoría de semigrupos Tn.

MAPEOS DE CUENTA EN SEMIGRUPOS T4 : —

Sea S un semigrupo T4 y sean α, $\gamma < S$ con $|\alpha| = 4$ y γ una α—cota propia [2]. Sean, además, Δ_1, Δ_2, Δ_3 y Δ_4 los mapeos de cuenta definidos en [3]. Siendo $|\gamma| = r$, tenemos:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 2r - w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$
$$\Delta_1 + 2\Delta_2 + 3\Delta_3 + 4\Delta_4 = 4r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

con $w\varepsilon\{1, 2\}$; siendo $A=2r-\Delta_2$, obtenemos:

$$\Delta_3 + \Delta_4 = A - w - \Delta_1 \quad \ldots\ldots \quad [2]$$
$$3\Delta_3 + 4\Delta_4 = 2A - \Delta_1 \quad \ldots\ldots \quad [3]$$

lo cual da:

$$\Delta_3 = 2A - 3\Delta_1 - 4w \quad \ldots\ldots \quad [4]$$
$$\Delta_4 = 2\Delta_1 + 3w - A \quad \ldots\ldots \quad [5]$$

Como $\Delta_3 \geqslant 0$ tanto como $\Delta_4 \geqslant 0$, obtenemos:

$$2A \geqslant 3\Delta_1 + 4w \quad \ldots\ldots \quad [6]$$
$$2\Delta_1 + 3w \geqslant A \quad \ldots\ldots \quad [7]$$

Así

$$2\Delta_1 + 3w \geqslant A \geqslant \frac{3}{2}\Delta_1 + 2w \quad \ldots\ldots \quad [8]$$

α — COTAS PROPIAS CON $w=2$:

Tenemos de [3], Lema 6:

$w=2 \longrightarrow \Delta_1 = 0$; así, si $w=2$ existen tres posibles casos; a saber:

$$w=2,\quad \Delta_1=0,\quad \Delta_2=2r-4,\quad \Delta_3=0,\quad \Delta_4=2$$
$$w=2,\quad \Delta_1=0,\quad \Delta_2=2r-5,\quad \Delta_3=2,\quad \Delta_4=1$$
$$w=2,\quad \Delta_1=0,\quad \Delta_2=2r-6,\quad \Delta_3=4,\quad \Delta_4=0$$

Podemos resumir el análisis anterior como sigue:

Teorema 1:

Sea S un semigrupo y sean $\alpha, \gamma < S$ con $|\alpha| = 4$ y γ una α—cota propia. Sean, además, Δ_1, Δ_2, Δ_3 y Δ_4 los mapeos de cuenta; si $|\alpha\gamma| = 2(|\gamma|-1)$, entonces se tiene necesariamente uno de los siguientes casos:

i) $\Delta_1=0,\quad \Delta_2=2|\gamma|-4,\quad \Delta_3=0,\quad \Delta_4=2.$
ii) $\Delta_1=0,\quad \Delta_2=2|\gamma|-5,\quad \Delta_3=2,\quad \Delta_4=1.$
iii) $\Delta_1=0,\quad \Delta_2=2|\gamma|-6,\quad \Delta_3=4,\quad \Delta_4=0.$

α — COTAS PROPIAS CON $w=1$:

El presente caso, como se verá, no tiene una caracterización simple como el anterior; sin embargo, es posible restringir razonablemente el rango de los mapeos de cuenta; la situación $w=2$ da:

$$\Delta_3 = 2A - 3\Delta_1 - 4 \quad \ldots\ldots \quad [9]$$
$$\Delta_4 = 2\Delta_1 + 3 - 4 \quad \ldots\ldots \quad [10]$$
$$4\Delta_1 + 6 \geqslant 2A \geqslant 3\Delta_1 + 4 \quad \ldots\ldots \quad [11]$$

Dado Δ_1, a continuación encontraremos los posibles valores de Δ_3. De [9] y [10] tenemos:

$$2(\Delta_4 - 2) = \Delta_1 - \Delta_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [12]$$

por lo tanto,

$$\Delta_3 = \Delta_1 \bmod (2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [13]$$
$$0 \leqslant \Delta_3 \leqslant \Delta_1 + 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [14]$$

Así existen no más de

$$\frac{\Delta_1}{2} + 2$$

valores posibles para Δ_3. Más aún de [9] se obtiene.

$$\Delta_3 \leqslant 4r - 3\Delta_1 - 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [15]$$

Así, Δ_3 queda limitado por:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_3 \leqslant \operatorname{Min}\{\Delta_1 + 2, 4r - 3\Delta_1 - 4\} \\ \Delta_3 = \Delta_1 \bmod (2) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [16]$$

A partir de [9] tenemos que, para cada par de valores de Δ_1, Δ_3, se obtiene un único valor para A y un único valor para Δ_4, a saber:

$$2A = \Delta_3 + 3\Delta_1 + 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [17]$$
$$\Delta_4 = \Delta_1 - \Delta_3 + 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [18]$$

Nótese que $\Delta_3 + 3\Delta_1 = 0 \bmod (2)$; así, $\Delta_3 + 3\Delta_1 + 4 = 0 \bmod (2)$, por lo tanto, la ecuación [17] da un número entero para A. Se tiene entonces, ya que cada valor de Δ_1 S define no más de

$$\frac{\Delta_1}{2} + 2$$

valores de Δ_3, que cada valor de Δ_1 define no más de

$$\frac{\Delta_1}{2} + 2$$

pares de valores para A y Δ_4. Podemos entonces resumir este análisis del modo siguiente:

Teorema 2:

Sea S un semigrupo y sean α, $\gamma < S$ con $|\alpha| = 4$ y γ una α—cota propia. Sean, además, Δ_1, Δ_2, Δ_3 y Δ_4 los mapeos de cuenta; si $|\alpha\gamma| = 2|\gamma| - 1$, para cada valor dado de Δ_1 con $0 \leqslant \Delta_1 \leqslant |\gamma|$, los mapeos de cuenta Δ_2, Δ_3 y Δ_4 pueden tomar no más de

$$\frac{\Delta_1}{2} + 2$$

valores, a saber: para cada valor de Δ_3 con

$$0 \leqslant \Delta_3 \leqslant \min \{\Delta_1 + 2 \, , \, 4|\gamma| - 3\Delta_1 - 4\}$$
$$\Delta_3 = \Delta_1 \bmod (2)$$

se tiene

$$2 \Delta_2 = 4|\gamma| - 3\Delta_1 - \Delta_3 - 4$$
$$\Delta_4 = \Delta_1 - \Delta_3 + 2$$

NOTA.—Sea S un semigrupo y sean α, $\gamma < S$ con $|\gamma| = 4$ y $|\gamma| = r$ una α—cota propia, si $|\alpha\gamma| = 2|\gamma| - 1$ el teorema anterior limita los posibles valores de los mapeos de cuenta ∂:

$$\sum_{i=1}^{r} (i/2 + 2) = \frac{1}{2} r \, (r/2 + 5)$$

casos diferentes.

COMENTARIOS

Dado que la propiedad T3 juega un papel básico en inmersión de un anillo de semigrupo en un anillo de división [5], es de gran importancia decidir si la propiedad T3 implica en T4, o si existe algún semigrupo T3 y no T4. El presente artículo, junto con [3], pretenden trazar el camino hacia la solución de este problema.

REFERENCIAS

1. ENGEL, A.: «The homomorphic image of a Tn-semigroup», *Semigroup Forum*, **5** (1972), 120-126.
2. ENGEL, A.: «Estructura y Clasificación de Semigrupos Tn, I», *Revista Matemática Hispano-Americana*, **33** (1973), 223-227.
3. ENGEL, A.: «Estructura y Clasificación de Semigrupos Tn, II», *Revista Matemática Hispano-Americana*, **34** (1974), 19-28.
4. ENGEL, A.: «Groups and Tn-Semigroups».
5. ENGEL, A.: «Necessary Conditions for a Semigroup Ring to be an Integral CRM-Ring with Identity», *Semigroup Forum*, **12** (1976), 207-214.
6. ORE, O.: «Linear Equations in Non-Computative Fields», *Ann. Math.*, **32** (1931), 463-477.
7. TAMARI, D.: «A Refined Classifications of Semigroups», *Proc. Internat. Congress Math.*, **1** (1954), 439.