UNA APLICACION DE LA TOPOLOGIA SEMI-ABIERTA SOBRE R

por

A. PEREZ GOMEZ y F. F. LOPEZ FERNANDEZ-ASENJO

Departamento de Teoría de Funciones. Universidad de Valladolid

El presente trabajo tiene por objetivo dar una nota pedagógica sobre una nueva demostración de un conocido teorema relativo a las funciones reales medibles Borel de la recta real. Utilizando una topología conveniente en R, distinta de la usual, se pretende probar el siguiente resultado:

«Toda función real de variable real, continua por la izquierda en todo punto de R, es medible Borel.»

Para una posible comparación del método que utilizamos, comenzamos dando una prueba del citado resultado empleando técnicas clásicas de Teoría de la medida.

Por R denotaremos la recta real con su topología usual, y por R_τ la recta real con la topología semi-abierta (esto es, una base de la topología τ está constituida por todos los intervalos del tipo $(a, b]$, con $a, b \in R$ y $a < b$).

Sea f una función real de variable real, continua por la izquierda en cada punto de R. Para cada $n \in N$ se considera el intervalo $I_n = (-n, n]$ y sea

$$\{ I_n^m \}_{m=1}^{m_n}$$

una partición del intervalo I_n formada por intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha y tal que la longitud de cada uno de ellos sea menor o igual que

$$\frac{1}{2^n}$$

Para cada $n \varepsilon N$ y cada $m \varepsilon N$ con $1 \leqslant m \leqslant m_n$ denotemos por $x_n{}^m$ el extremo izquierdo del intervalo $I_n{}^m$ Si

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{m_n} f(x_n{}^m) \chi_{I_n{}^m}$$

entonces, α_n es una función medible Borel, y en virtud de la continuidad por la izquierda de f, se sigue que la sucesión de funciones

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$$

converge puntualmente hacia f.

Observando que cualquier función $f : R \to R$ es continua por la izquierda si y sólo si $f : R_\tau \to R$ es continua, otro método de demostrar el resultado anterior consiste en probar que la familia $B(R)$ de los conjuntos Borel de R coincide con la familia $B(R_\tau)$ de los conjuntos Borel de R con la topología semi-abierta.

Como la topología usual de R es menos fina que la topología τ, evidentemente $B(R) \subset B(R_\tau)$. Recíprocamente, si A es un abierto de R_τ, designemos por A^* el conjunto de puntos $x \varepsilon A$ tales que x es un punto interior a A por la topología usual de R. Trivialmente A^* es abierto en R por la topología usual. Ahora bien, el conjunto $A — A^*$ es numerable, ya que si $x_0 \varepsilon A — A^*$, existe un intervalo $(h, x_0]$ con $(h, x_0] \subset A$ y como $(h, x_0) \subset A^*$ se puede asignar a x_0 un número racional r_0 del intervalo (h, x_0) (de forma que, a puntos $x_0, y_0 \varepsilon A — A^*$ con $x_0 \neq y_0$ corresponden racionales distintos). Por consiguiente, cada abierto de R_τ es unión de un abierto de R y de un conjunto numerable, luego todo abierto de R_τ es un elemento de $B(R)$ y $B(R_\tau) \subset B(R)$.