APLICACION DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES AL CALCULO DE DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS DE TEMPERATURA EN SOLIDOS

por

JULIO LEON ALVAREZ

INTRODUCCION

Una función de variable compleja, $w = f(z)$, se interpreta geométricamente como una transformación de puntos entre los planos complejos representados por las variables z y w, respectivamente. Estas transformaciones se denominan *conformes*, si se conservan en cada punto los ángulos entre cada par de curvas del plazo z y el de sus imágenes en el plano w. La Teoría de Funciones de Variable Compleja permite afirmar que serán conformes en un dominio todas las transformaciones determinadas por funciones analíticas con derivadas no nulas en dicho dominio.

Como se verá más adelante, la función de distribución de temperaturas en un cuerpo isótropo es armónica, es decir, satisface la Ecuación de Laplace en el dominio representado por dicho cuerpo, además de unas ciertas condiciones de contorno. Estas pueden ser de dos clases: la función debe ser armónica en un dominio y tomar valores determinados en la frontera del mismo (Problema de Dirichlet), o bien que la derivada de la misma, según la normal al contorno, adquiera un valor dado (Problema de Neumann).

En Teoría de Funciones de Variable Compleja se demuestra que las condiciones de contorno anteriormente citadas, son invariantes frente al cambio de variables que implica toda transformación conforme. Esta propiedad facilita extraordinariamente la resolución, entre otros, del cálculo de distribuciones estacionarias de temperaturas en un sólido isótropo.

ECUACIÓN DE TRANSMISIÓN DEL CALOR.

Sea $T(x, y, z)$ la temperatura de un cierto material que determina un dominio tridimensional D, limitado por una superficie cerrada S. El material alcanza, en un punto (x, y, z), la temperatura T por acumulación de energía molecular cinética; además, el calor fluye en dirección contraria a $\overrightarrow{\mathrm{grad}\ T}$ en magnitud igual a $\lambda(x, y, z, T) \cdot |\overrightarrow{\mathrm{grad}\ T}|$, donde λ representa la conductividad térmica.

Aplicando el teorema de la Conservación de la Energía en un dominio D_0, interior a D, de superficie S_0,

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} E(x, y, z, T(x, y, z, t))\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{S_0} \lambda(x, y, z, T) \cdot |\overrightarrow{\mathrm{grad}\ T}| \cdot \vec{n}\, ds \qquad [1]$$

E, es energía por unidad de volumen; $\vec{n}$, vector normal a la superficie y dS, elemento de área sobre S_0.

Derivando la integral del primer miembro se obtiene,

$$\int_{D_0}\left[\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}\right] dx\, dy\, dz = \int_{S_0} \lambda(x, y, z, T) \cdot |\overrightarrow{\mathrm{grad}\ T}| \cdot \vec{n} \cdot dS \qquad [2]$$

y el Teorema de Gauss permite escribir:

$$\int_{D_0}\left[\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \mathrm{div}\,(\lambda\, |\mathrm{grad}\ T|)\right] dx\, dy\, dz = 0 \qquad [3]$$

Admitiendo la continuidad del integrando, éste será nulo en D_0, luego:

$$\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \mathrm{div}\,(\lambda\, |\mathrm{grad}\ T|) = O$$

donde

$$\frac{\partial E}{\partial T}$$

es el calor específico. En el caso ideal de que

$$\frac{\partial E}{\partial T}$$

y λ sean constantes, y denominando

$$K = \frac{\lambda}{\dfrac{\partial E}{\partial T}}$$

obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = K \cdot \nabla^2 T} \qquad [4]$$

que es la ecuación de transmisión del calor.

Régimen estacionario.

Si se mantienen fijas unas condiciones en los límites, al cabo de un cierto tiempo la temperatura de los diferentes puntos del cuerpo alcanza un valor independiente del tiempo. En esas circunstancias

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$

y la ecuación de transmisión [4] se reduce a:

$$\nabla^2 T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = O \qquad [5]$$

que es la ecuación diferencial de Laplace.

Resumiendo, la función de distribución estacionaria de temperaturas en un sólido debe de satisfacer la ecuación de Laplace en cada punto interior del mismo.

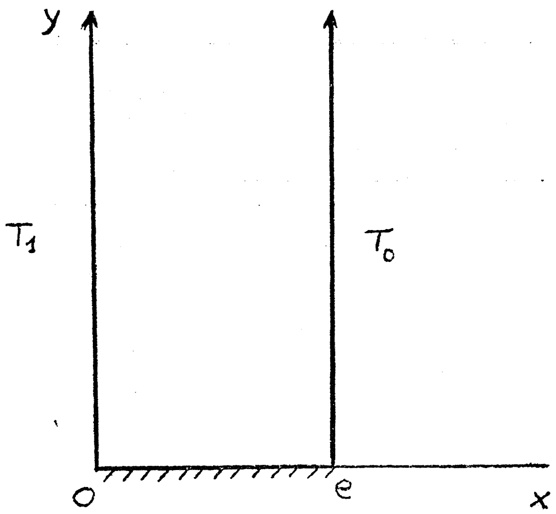
Según lo anterior y la continuidad de T y sus derivadas, T es función armónica de x e y en el dominio representado por el interior del cuerpo o, mejor dicho, para toda sección perpendicular al eje OZ.

Las superficies equiescalares, $T(x, y) =$ cte., constituyen las isotermas. El gradiente de T será perpendicular a la isoterma en cada punto, y el flujo calorífico máximo está dirigido en esa dirección. Si $S(x, y)$ es la función armónica conjugada de $T(x, y)$, las curvas $S(x, y) =$ cte. tienen por vector tangente al gradiente de T, en otras palabras, éstas son las líneas de flujo.

Si la derivada según la normal es nula a lo largo de cualquier parte del contorno del sólido, el flujo de calor que atraviesa aquella zona es nulo, es decir, está térmicamente aislado.

Distribución de temperaturas en pared plana simple.

Se trata de un muro de material homogéneo, de dimensiones ilimitadas, salvo en el espesor. Sus paredes laterales se mantienen a temperaturas fijas, T_1 y T_0, siendo $T_1 > T_0$. Supondremos que la base de la pared está térmicamente aislada.



Las condiciones de contorno a que debe satisfacer $T(x, y)$ son:

$$T(0, y) = T_1,\ T(e, y) = T_0 \text{ y } \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad ;$$

además de satisfacer la ecuación de Laplace. La función buscada es

$$\boxed{T(x, y) = (T_0 - T_1)\frac{x}{e} + T_1}$$

El gradiente será el vector

$$\overrightarrow{\text{grad } T} = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} = \frac{T_0 - T_1}{e}\vec{i}$$

y el flujo calorífico según el eje 0X,

$$\dot{Q} = \lambda \frac{T_1 - T_0}{e}$$

Las superficies isotermas, en este caso, son:

$$C = (T_0 - T_1)\frac{X}{e} + T_1$$

o sea,

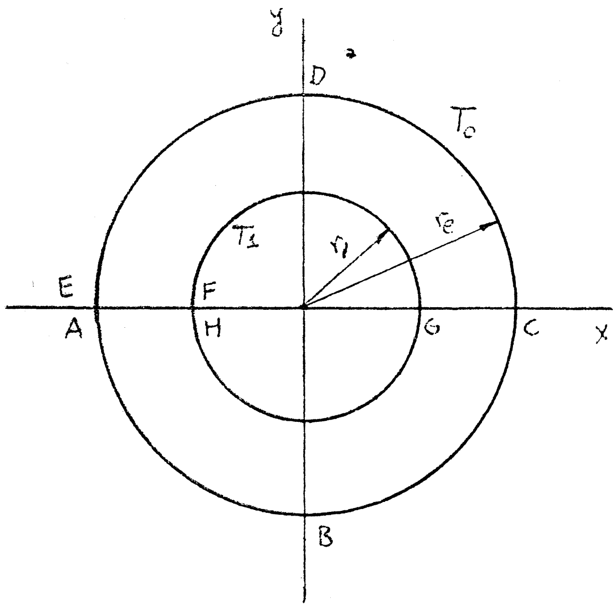
$$x = \frac{e(C - T)}{T_0 - T_1}$$

planos paralelos a las paredes que limitan el muro.

Este caso se ha resuelto, por su sencillez, sin recurrir a transformaciones conformes. En adelante será necesario utilizar este instrumento de cálculo.

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN PARED TUBULAR SIMPLE.

Se trata de un cilindro de longitud ilimitada y material homogéneo. Su sección recta es una corona circular de radios r_i y r_e ($r_e < r_i$), en el que el interior y el exterior del mismo están a distinta temperatura. La figura adjunta representa una sección recta del tubo.



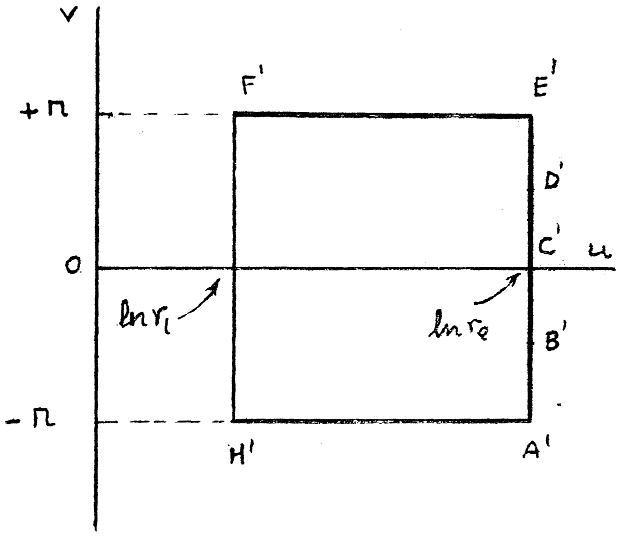
La simetría del problema aconseja utilizar coordenadas polares. La ecuación de Laplace toma la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \qquad [6]$$

Las condiciones de controno a que debe satisfacer $T(r,)$ son: $T(r_i, \theta) = T_1$ y $T(r_e, \theta) = T_0$ en el dominio definido por $r_i < r < r_e$, $-\pi < \theta < + \pi$. Aplicando la transformación conforme $w = ln(z) = ln(r) + i\theta = u + iv$, que transforma la corona circular anterior en el rectángulo del plano w definido por: $ln(r_i) < u < ln(r_e)$, $-\pi < v < + \pi$.

Las condiciones de contorno de $T(u, v)$ son ahora: $T(ln\ r_i, v) = T_1$ y $T(ln\ r_e, v) = T_0$. La solución de la ecuación de Laplace, que cumple las anteriores condiciones, es:

$$T(u, v) = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{ln \dfrac{r_e}{r_i}} (u - ln\ r_i)$$



Una vez escrita en las cordenadas originales se obtiene la función armónica,

$$\boxed{T(r,\theta) = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{ln \dfrac{r_e}{r_i}} ln \frac{r}{r_i}}$$

Las isotermas son:

$$C = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{ln \dfrac{r_e}{r_i}} ln \frac{r}{r_i}$$

de donde

$$r = e^{\dfrac{C - T_1}{T_1 - T_0} ln \dfrac{r_e}{r_i} + ln\, r_i}$$

que representa circunferencias con centro en el origen de cordenadas. El flujo térmico,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

es

$$\dot{Q} = \frac{\lambda(T_1 - T_c)}{ln \dfrac{r_e}{r_i}} \frac{1}{r}$$

(Continuará)