SOLUCIONES DE LOS JUEGOS N-PERSONALES

por

SUSANA PEREZ BOADA

1. CONCEPTOS BÁSICOS.

Se define un juego n-personal como el conjunto de reglas que acuerdan obedecer un determinado grupo de personas, en orden a obtener ciertas situaciones llamadas resultados.

Para la representación de los juegos, existen dos formas fundamentales:

a) *Representación en forma extensiva.*

Consiste en un grafo conectado finito sin circuitos de ramas, llamado también árbol del juego, donde cada nodo es un punto de decisión para uno de los jugadores, y las ramas que partan de él representan las posibles alternativas entre las que el jugador debe determinar su elección. Cada uno de los vértices finales del árbol constituye un posible punto final del juego, y tiene, por lo tanto, un resultado asociado de la siguiente forma: el conjunto de todos los vértices terminales tiene definida sobre él una función numérica y lineal $M_i(\alpha)$, llamada función de utilidad, que representa el pago correspondiente al jugador i al llegar al vértice final α.

b) *Representación en forma normal.*

Consiste en una descripción de decisiones a cargo de cada uno de los jugadores, realizada antes de comenzar el juego, y que representa el comportamiento de cada jugador frente a cada una de las posibles situaciones. Dicha descripción, a cargo del jugador i, recibe el nombre de estrategia pura σ_i.

Si el juego es tal que en él no interviene el azar, y si se supone que cada jugador ha hecho ya su decisión, se tendrá una n-upla de estrategias $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, que determina una partida α asociada a un vértice final del árbol. Se define entonces para el jugador i-ésimo:

$$M_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = M_i(\alpha)$$

Si, por el contrario, hay intervención del azar, la selección de estrategias $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, no determina una única partida α, sino que existe una distribución de probabilidad $p(\alpha)$ sobre las posibles partidas. Y en este caso, se define para el jugador i:

$$M_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \sum_{\alpha} p(\alpha) \cdot M_i(\alpha)$$

2. Clases de juegos n-personales.

Entre los juegos n-personales, se puede establecer la siguiente distinción:

a) *Juegos no cooperativos.*

Son aquéllos en que sus participantes actúan de forma independiente para maximizar sus propios beneficios, y no se permite ningún tipo de relación previa entre los juegadores.

En estos juegos, la solución está formada por un punto de equilibrio, que consiste en una selección de estrategias puras $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, de forma que a ningún jugador le es ventajoso cambiar, suponiendo que ningún otro cambie, es decir, $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ es un punto de equilibrio $\longleftrightarrow \forall\ i$ y $\forall\ \eta_i$, estrategia pura de i, se verifica que

$$M_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \eta_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \leqslant M_j(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$$

Pero, desgraciadamente, no se puede asegurar la existencia de puntos de equilibrio para todos los juegos n-personales no cooperativos. Se introducen entonces las estrategias mixtas, que, como su propio nombre indica, consisten en mixturas de estrategias puras, asignándoles probabilidades $\xi(\sigma_i)$ que, en total, sumen 1, es decir:

$$\forall\ i\ ,\ \xi_i(\sigma_i) \geqslant 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \xi(\sigma_i) = 1$$

Y si se extiende el concepto de función de utilidad para estas estrategias:

$$\forall\ j,\ M_j(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \xi(\sigma_i), \ldots, \sigma_n) = \sum_{\sigma_i} \xi(\sigma_i) \cdot M_j(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n),$$

y a partir de aquí se extiende también la noción de punto de equilibrio, se puede ya asegurar, según demostró Nash, que «todo juego n-personal finito no cooperativo, tiene, al menos, un punto de equilibrio de estrategias mixtas».

b) *Juegos cooperativos.*

Son aquellos en que sus participantes tienen entera libertad de comunicación previa para realizar acuerdos mutuos. La competencia no es estricta, y siempre hay opción para formalizar alguna relación entre los jugadores, que, a la larga, maximice sus propios beneficios. Aparece, por tanto, la posibilidad de que los participantes se unan formando coaliciones o grupos. Además, parece lógico suponer que esta confabulación entre los jugadores se hace en coaliciones disjuntas, dentro de las cuales hay una cooperación total, y entre las que existe una ruda competencia. Esta suposición equivale a considerar una partición dentro del conjunto total de jugadores, que recibe el nombre de estructura de coalición.

Se distinguen, en los juegos cooperativos, dos casos:

b.1. Caso en que se prohiba cualquier tipo de pagos secundarios o adicionales, además de los dados por la forma normal del juego. Supondremos también que los jugadores que han decidido cooperar pueden correlar sus estrategias, es decir, definir una distribución de probabilidad sobre las posibles n-uplas de estrategias mixtas. En estas condiciones, se considera la solución como un conjunto de pares en equilibrio, formados por una estrategia correlada $\sigma(T_i)$ elegida por los jugadores de cierta coalición, T_i, y una estructura de coalición asociada, de la forma $\gamma = (T_1, T_2, \ldots, T_s)$. Veamos qué se entiende por pares en equilibrio:

Consideremos una estructura de coalición γ distinta de la trivial $\gamma_T = (\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$, y el conjunto $\Psi(\gamma)$, que representa el conjunto de todas las coaliciones a las que es posible cambiar, cuando los jugadores están distribuidos según γ. Se dice entonces que el par $(\sigma(T_1), \ldots, \ldots, \sigma(T_s); \gamma)$ está en equilibrio o es Ψ-estable, si para toda coalición $S \in \Psi(\gamma)$ y para toda estrategia mixta correlada $\sigma(S)$ existe al menos un jugador $j \in S$, vulnerable por un ataque de $-S$ (coalición compuesta por todos los jugadores que no pertenecen a S). Esto es, $-S$ tiene una estrategia correlada $\sigma(-S)$, tal que

$$M_j(\sigma(T_1), \sigma(T_2), \ldots, \sigma(T_s)) > M_j(\sigma(S), \sigma(-S))$$

Si, por el contrario, no se permite correlar las estrategias, la idea es que, entre los posibles cambios de coalición coordinados (pero no correlados) siempre haya, al menos, un jugador que no salga beneficiado. Es decir, si llamamos δ a una estrategia mixta incorrelada, se dice que el par (δ, γ) es Ψ-estable, si para cada elección de estrategias mixtas a cargo de una coalición S, hay, al menos, un miembro de S que no aumenta sus beneficios.

b.2. Caso en que estén permitidos los pagos secundarios a lo largo de todo el desarrollo del juego.

Si suponemos que se forma una coalición S, se puede considerar que, en el peor de los casos, el resto de los jugadores, $-S$, se enfrentan a dicha coalición. Se formaría así un juego bipersonal ($n = 2$), no cooperativo, entre S y $-S$, cuyo valor, $v(S)$, se puede calcular fácilmente, ya que viene dado por el teorema del minimax. Este valor, v, se puede calcular para todas las posibles coaliciones, resultando una función real, llamada función característica, que cumple las siguientes propiedades:

i. $v(\emptyset) = 0$.
ii. $\forall$ R, S $\in$ N, R $\cap$ S $= \emptyset$, es $v(\mathrm{R} \cup \mathrm{S}) \geqslant \mathrm{V(R)} + v(\mathrm{S})$, siendo N el conjunto de todos los jugadores.

Y si el juego es de suma constante, es decir, si la suma total de los pagos a los jugadores es una constante, entonces la función v verifica también

iii. $v(\mathrm{S}) = v(\mathrm{N}) - \mathrm{V}\,(-\mathrm{S}),\ \forall\ \mathrm{S} \in \mathrm{N}$.

Podemos entonces reunir este valor, $v(\mathrm{S})$, con el pago que se recibe al final del juego y con los pagos secundarios, y formar una n-upla de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que representa los pagos totales para los n jugadores. Dicha n-upla recibe el nombre de imputación, si sus componentes verifican estas dos condiciones:

i. $v(\{i\}) \leqslant x_i,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$.
ii. $\sum\limits_{i \in \mathrm{N}} x_i = v(\mathrm{N})$.

Es decir, los jugadores exigen que el pago total recibido, x_i, no sea nunca menor que el que cada uno de ellos puede obtener jugando por su cuenta; por lo tanto, se puede considerar que una imputación refleja un estado de equilibrio. Y por esta razón, algunas de las soluciones que veremos están formadas por conjuntos de imputaciones con ciertas restricciones.

3. Soluciones de los juegos n-personales.

Las soluciones más importantes que han aparecido para tratar de resolver los juegos cooperativos, con pagos secundarios, son:

I. *Solución de Von Neumann-Morgenstern.*

Esta solución está formada por un subconjunto I del conjunto de las imputaciones, cuyos elementos verifican las siguientes condiciones de estabilidad:

i. Estabilidad interna: ningún elemento de I domina a otro del mismo conjunto. Es decir, $\forall\ x, y \in \mathrm{I},\ x \succ y$ e $y \succ x$, donde la dominancia de imputaciones viene definida por Von Neumann y Morgenstern de la forma

para toda imputación «x» y para toda imputación «y», $x \prec y$, a través de la coalición T $\longleftrightarrow \exists$ T tal que

$$\cdot\ v(\mathrm{T}) \geqslant \sum_{i \in \mathrm{T}} y_i$$

$$\cdot\ y_i > x_i,\ \forall\ i \in \mathrm{T}$$

ii. estabilidad externa: toda imputación fuera de I es dominada por alguna de I. Es decir, $\forall\, z \notin \mathrm{I},\ \exists\, x \in \mathrm{I}$, tal que $x \succ z$.

Pero ocurre entonces que, por su propia definición, una solución, en el sentido de Von Neumann-Morgenstern para un juego n-personal, puede constar de un gran número de imputaciones. Y más aún, puede incluso ocurrir que un juego tenga multiplicidad de soluciones.

Para resolver esto, Von Neumann y Morgenstern proponen que la solución dependa de ciertos «standards de comportamiento», que vendrán dados por reglas morales y convencionales impuestas por la sociedad.

II. *Solución fuerte de Vickrey.*

La idea central de Vickrey es considerar que una imputación dentro de una solución, en el sentido de Von Neumann-Morgenstern, tiene probabilidad de ser elegida, si cualquier desviación por parte de ciertos jugadores, que Vickrey llama «heréticos», hacia una nueva imputación fuera de la solución, que Vickrey llama asimismo «imputación herética», trae consigo una acción correctiva que implica la vuelta de éstos a la situación inicial, y supone la pérdida neta de al menos uno de los jugadores.

Es decir, dadas una solución I, una imputación $x \in \mathrm{I}$, una imputación herética z que domina a x a través de T, y el conjunto H de elementos de I que dominan a z, Vickrey define I como una solución fuerte, si para dichos x, z, T, y para cada $y \in \mathrm{H}$, hay al menos un jugador $j \in \mathrm{T}$, tal que $y_j < x_j$.

III. *Solución de la teoría de la Ψ-estabilidad.*

A diferencia con las anteriores, esta teoría no sólo busca soluciones dentro del conjunto de imputaciones, sino que estudia las condiciones de estabilidad y equilibrio de pares (x, γ) formados por una imputación x, y una estructura de coalición γ asociada a x.

Además, admite la existencia de diversas coacciones en la sociedad, en cierto modo estables, que limitan los cambios de coalición, y están formalizadas en una regla Ψ de cambios admisibles que, como ya se dijo, indica las coaliciones que está permitido formar a partir de una estructura dada.

En esta situación, la solución de un juego dado con función característica v, según la teoría de la Ψ-estabilidad, está formada por un conjunto de pares de la forma (x, γ) que verifican:

i. $\forall\, \mathrm{S} \in \Psi(\gamma)$, es $v(\mathrm{S}) \leqslant \sum_{i \in \mathrm{S}} x_i$

ii. Si $x_i = v(\{i\})$, entonces $\{i\} \in \gamma$.

IV. *Valor de Shapley.*

La idea de Shapley fue evaluar un juego v mediante un valor $\phi_i(v)$ calculado «a priori» y definido para cada jugador, dependiente del conjunto de valores $v(T)$, para toda coalición T. Para ello, Shapley dio tres axiomas basados en propiedades que intuitivamente debería cumplir una función de este tipo. Dichos axiomas fueron:

S.1. El valor será una propiedad abstracta del juego, es decir, invariante frente a cualquier permutación π:

$$\phi_i(v) = \phi_{\pi(i)}(\pi(v)), \ \forall \ i$$

S.2. Los valores individuales del juego formarán una partición aditiva del valor del juego entero:

$$v(N) = \phi_1(v) + \phi_2(v) + \ldots + \phi_n(v)$$

S.3. Si u y v son dos juegos cualesquiera, se tiene que

$$\phi_i(u - v) = \phi_i(u) - \phi_i(v), \ \forall \ i$$

Y a partir de estos tres axiomas, Shapley demostró la existencia de una única función de evaluación $\phi_i(v)$ que llamó valor del juego v para cada jugador i, cuya fórmula explícita expresó así:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!} \left(v(T) - v(T - \{i\})\right)$$

donde t representa el número de elementos de la coalición T.

Evidentemente, si $i \notin T$, el término $v(T) - v(T - \{i\})$ se hace 0, es decir, la expresión anterior sólo depende de aquellas coaliciones que contienen a i, y lo que representa es una suma de todas las adiciones incrementales efectuadas por i a todas las coaliciones de las que es miembro.

V. *Solución de Aumann-Maschler.*

Estos autores suponen la existencia de una estructura determinada, y estudian las posibles incidencias que pueden tener lugar en una etapa del juego, con el fin de determinar si el pago es o no apropiado para la estructura de coalición dada.

Definen una objeción de un jugador i contra otro j como una propuesta para formar una nueva coalición S con ciertos pagos. Dicha objeción será válida si se verifica:

i. $i \in S$, pero $j \notin S$ en la actualidad.
ii. $y_i < y_i(S)$, $\forall \ i \in S$, siendo y_i el pago asignado al jugador i en la estructura de coalición dada.
iii. Ambos jugadores estaban inicialmente en la misma coalición.
iv. $\sum_{i \in S} y_i(S) = v(S)$.

A su vez, una contraobjeción o respuesta de j para formar una nueva coalición T será válida cuando:

i. $j \in T$, pero $i \notin T$.
ii. $y_i(T) \geqslant y_i(S)$, $\forall\, i \in S$.
$y_i(T) \geqslant y_i$, $\forall\, i \notin S$.
iii. $\sum_{i \in T} y_i(T) = v(T)$.

Pues bien, en estas condiciones, Aumann y Maschler definen un pago como estable si, siempre que un jugador i tiene una objeción válida contra j, éste tiene una contraobjeción válida para i. Y la solución estará entonces formada por el conjunto de los pagos estables, llamado también «conjunto de regateo»

VI. *Resultados razonables de Milnor.*

Dentro del conjunto E de resultados,

$$E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) / \sum_{i \in N} x_i \leqslant v(N)\}$$

Milnor estableció tres clases diferentes, como consecuencia de exigir ciertas condiciones. Los resultados de cada clase los llamó «razonables», en el sentido de que aunque no está asegurado que todos ellos sean soluciones plausibles, lo que es seguro es que los que están fuera no lo son en absoluto.

— La clase B está formada por todos los resultados $x \in E$, tales que

$$\forall\, i \text{ es } x_i \leqslant b(i) = \max_{S} (v(S) - v(S - \{i\})$$

— La clase L es el conjunto de todos los resultados $x \in E$, tales que

$$\forall\, S \text{ es } \sum_{i \in S} x_1 \geqslant \min_{S' \subset S} (v(S') - v(S - S'))$$

— La clase D está formada por los resultados $x \in E$, tales que

$$\forall\, S,\ \sum_{i \in S} x_i \leqslant \min_{\substack{x \\ \sum_{i \in -S} x_i = v(-S)}} \{\max_{\substack{T \\ T \subset -S}} (v(S \cup T) - \sum_{i \in T} x_i))\}$$

Sobre estas tres clases se han hecho muy pocos trabajos, y es por eso que sólo se conocen algunas de sus propiedades matemáticas y que su único uso ha quedado restringido al análisis de algún experimento práctico.

4. Discusión.

Si se analizan con detenimiento las teorías expuestas, se llega a la conclusión de que la existencia de múltiples soluciones es el mál común a todas ellas. El hecho de no poder aislar una solución como «la mejor del juego» nos induce a pensar que todavía queda mucho por andar en el campo de los juegos n-personales. En otras palabras, el problema de las soluciones de estos juegos no ha sido todavía resuelto de una forma totalmente satisfactoria. Esto lo demuestra, además, el hecho de que ninguna de las teorías que hasta ahora han aparecido goza de una aceptación universal.

Quizá la más extendida sea la de Von Neumann-Morgenstern, ya que es la más antigua y ha influido fuertemente en todas las demás. Pero, no obstante, cuando se profundiza en ella, pronto se encuentran puntos oscuros, o más bien, puntos que, de algún modo, podríamos llamar «no aceptables». En efecto, en la teoría de Von Neumann-Morgenstern, por su propia definición de solución, es fácil que aparezcan en un mismo juego un elevado número de conjuntos estables, que, a su vez, contienen, por lo general, más de una imputación.

Ante esta situación, cabe preguntarse: ¿qué conjunto debe elegirse como solución óptima? Y supuesto elegido uno, ¿qué imputación es la mejor? Como es sabido, Von Neumann y Morgenstern contestan la primera pregunta indicando que la solución debe depender de ciertos «standards» o normas de comportamiento, impuestas por la sociedad. Y más aún, para estos autores, la segunda cuestión no supone problema, puesto que sus soluciones están formadas por conjuntos estables de imputaciones.

Estos argumentos evidencian, de una manera rotunda, aquellos puntos oscuros de que hablábamos, en los que se puede decir que falla la teoría.

En primer lugar, es poco satisfactorio el hecho de aceptar la teoría de la existencia de esos «standards de comportamiento» de que hablan Von Neumann y Morgenstern, o mejor aún, lo que resulta realmente difícil es concretarlos y sistematizarlos. Por otra parte, y en el supuesto de que existieran, no hay por qué suponer que sean aceptados por todos los participantes en el juego. Más aún, si por determinadas circunstancias, los jugadores lograran ponerse de acuerdo, estaríamos en condiciones de seleccionar cierto conjunto estable como óptimo y, ante tal situación, nos enfrentaríamos al segundo problema dentro de dicho conjunto: ¿cuál es la imputación óptima?

En principio, todas son válidas, pues cumplen las condiciones de estabilidad exigidas. Podríamos, por tanto, considerar que cualquiera de esas imputaciones se puede tomar como solución del juego n-personal. Con esto quedaría resuelto el problema, aunque, desde luego, no de una forma totalmente satisfactoria, ya que no se logra aislar una solución única para cada juego.

Cabe, entonces, recurrir de nuevo a los «standards de comportamiento» propuestos por Von Neumann y Morgenstern para tratar de elegir una imputación óptima. Pero es evidente que nos encontraríamos con los mismos problemas planteados anteriormente.

De hecho, ¿qué se puede esperar de una situación en la que interviene un determinado número de personas o grupos, velando cada uno por sus propios intereses? Si ya es difícil ponerse de acuerdo entre dos, el problema se agudiza notablemente cuando este número aumente hasta cifras mucho más elevadas, como ocurriría, por ejemplo, en unas elecciones políticas, o en cualquier problema de rivalidad en el campo económico o militar.

Se pueden, desde luego, proponer otras soluciones, como, por ejemplo, exigir una cooperación previa entre los jugadores, de forma que sean ellos mismos los que fijen esos «standards de comportamiento». Si esto fuese posible, se conseguiría, al menos, que todos se viesen en la obligación de aceptarlos, y evitaríamos uno de los principales problemas. No obstante, aquí, como en otras situaciones, se tropieza también con grandes dificultades, debidas, en su mayoría, a cuestiones relacionadas con el entendimiento entre unos y otros. Es decir, creemos —sin ánimo de ser pesimistas— que resulta muy difícil reflejar matemáticamente, de una forma totalmente general, una situación donde se conjugan simultáneamente intereses, rivalidades, ideales y, en resumen, todo aquello que forma parte de ese gran complejo que llamamos «ser humano».