RESOLUCION APROXIMADA DE UNA ECUACION DIFERENCIAL PARABOLICA PARTICULAR POR ELEMENTOS FINITOS

por

FRANCISCO F. MICHAVILA PITARCH

y

LUIS GAVETE CORVINOS

1. INTRODUCCIÓN.

En la resolución de problemas en medios continuos es típico encontrarse el siguiente planteamiento:

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$, de frontera Γ y T el espacio de la variable tiempo, hallar la función $\varphi \in H^1_0 (\Omega \times T)$, tal que siendo $f \in L_2 (\Omega \times T)$ se cumpla:

$$A \varphi = f$$

donde A es un operador diferencial sobre $\Omega \times T$.

Verificándose

$$B \varphi = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

como condición de contorno.

A continuación vamos a considerar la ecuación diferencial que define los procesos de la difusión:

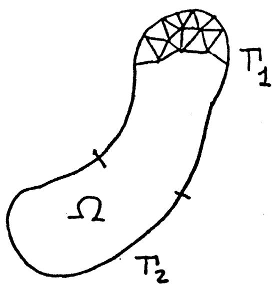
$$(1) \quad A \varphi = \nabla^T K \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - Q \qquad \text{en } \Omega \times T$$

con las condiciones de contorno:

$$(2) \quad K \frac{\partial \varphi}{\partial n} - q = 0 \qquad \text{en } \Gamma_2$$

(3) $\varphi - \varphi(a) = 0 \qquad \text{en } \Gamma_1$

$a \in \Gamma_1$
$Q = Q(x, y, t)$
$q = q(x, y, t)$
n = vector normal en Γ_2
$t \in T$
K = constante arbitraria



El problema (1), (2) y (3) se denomina problema mixto, condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera y de Neumann, sobre el resto de la frontera.

Consideremos, a continuación, que la variable t toma un valor fijo cualquiera (su variación se introduce en el apartado 2).

La aproximación de (1), (2) y (3) por elementos finitos se plantea del modo siguiente:

Supongamos que la frontera Γ de Ω es un polígono. Sea h un parámetro positivo que tiende a cero, asociamos a h un recubrimiento triangular de Ω tal que:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I(h)} T_i$$

T_i son triángulos contenidos en Ω.

El conjunto $\{T_i\}$ goza de las propiedades siguientes:

(i) $\dim(T_i) \leq h$.
(ii) Si T_i y T_j son dos elementos del conjunto, se tiene:

— sea $T_i \cap T_j = \emptyset$.
— sea T_i y T_j tienen un lado en común.
— sea T_i y T_j tienen un vértice en común.

Por otra parte, consideremos el espacio V_h que verifica las propiedades siguientes:

(i) la restricción de $v_h \in V_h$ a cada T_i coincide con un polinomio de grado inferior o igual a 1.
(ii) $v_h \in C^0(\overline{\Omega})$.
(iii) v_h satisface las condiciones impuestas en cada tramo de la frontera.

Entonces $V_h \subset H^1_0(\Omega)$. V_h es un espacio de dimensión finita y es tal que sus elementos, $v_h \in V_h$, están determinados de forma única por sus valores en los vértices interiores a Ω de todos los triángulos.

Llamemos

$$\{a_i\}_{i=1}^{N(h)}$$

al conjunto de los vértices de la triangulación interiores a Ω.

Definimos una base de V_n

$$\{N_{i,h}\}_{i=1}^{n(h)}$$

tal que:

$$N_{i,h}(a_j) = \delta_{ij}$$

El soporte de cada función $N_{i,h}$ de la base es la unión de todos los triángulos cerrados que tienen vértice en a_i.

Toda función $v_h \in V_h$ definida en función de la base toma la forma:

$$v_h = \sum_{i=1}^{n(h)} v_h(a_i)\, N_{i,h}$$

luego:

$$\sum_{J=1}^{n(h)} a(N_{jh}, N_{ih})\, v_h(a_j) = (f, N_{ih}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n(h)$$

que es el sistema lineal que se origina al utilizar el método de elementos finitos.

Este sistema goza de las propiedades:

(i) $(a(N_{jh}, N_{ih}))_{1 \leqslant i, j \leqslant n(h)}$ es simétrica definida. positiva.

(ii) $a(N_{jh}, N_{ih}) \neq 0$ si y sólo si son a_i y a_j vértices de un mismo triángulo.

Un proceso análogo se plantea al utilizar elementos rectangulares en lugar de triangulares.

A partir de lo anterior, la función φ se aproxima por otra $\widehat{\varphi}$ utilizando la base de funciones $\{N_{ih}\}$. Para un h fijo en la malla de la triangulación escribiremos abreviadamente $\{N_i\}$ por

$$\widehat{\varphi} = \sum_i a_i\, N_i$$

Los parámetros $\{a_i\}$ se obtienen de un conjunto de ecuaciones integrales del tipo:

$$\int_\Omega G_j(\widehat{\varphi})\, d\,\Omega + \int_\Gamma g_j(\widehat{\varphi})\, d\,\Gamma = 0$$

$$\int_\Omega G_j(\widehat{\varphi})\, d\,\Omega = \sum_i \int_{\Omega_i} G_j(\widehat{\varphi})\, d\,\Omega$$

$$\int_\Gamma g_j(\widehat{\varphi})\, d\,\Gamma = \sum_i \int_{\Gamma_i} g_j(\widehat{\varphi})\, d\,\Gamma$$

$$j = 1, \ldots, n$$

Si V es el espacio donde se encuentra el elemento solución del problema φ y es $V = H^1_0(\Omega)$, es necesario encontrar un subespacio $v_h \subset V$, v_h denso en V y una aplicación:

$$r_h : v_h \to V(r_h \varphi = \widehat{\varphi})$$

tal que:

$$\inf_{\varphi_h \in v_h} ||\varphi - \widehat{\varphi}|| \to 0$$

Para ello, tomemos un subespacio $v_h \subset H^1_0(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})_n\ y_{(h)}$, sea $\widehat{\varphi}$ la interpolada de φ en todos los vértices de $\{a_i\}_{i=1}$.

Las diferencias entre las distintas aproximaciones por elementos finitos residen en la elección de la base de funciones $\{N_i\}$ que se escoge y también en el modo en que se derivan las ecuaciones aproximadas.

Aquí veremos varios procedimientos, basados, o bien en principios variacionales, o bien en métodos residuales.

2. Principio variacional de Gurtin.

Introducimos sobre el dominio Ω y su contorno Γ, de un medio continuo, la expresión funcional de Gurtin:

$$\chi = \frac{1}{2}\int_\Omega \{\zeta\, c\, \varphi * \varphi + \nabla \varphi_i * K_{ij} \nabla \varphi_j - 2\,\zeta\, c\, \varphi_0 * \varphi -$$

$$-2\,\zeta * p * \varphi\}\, d\,\Omega - \int_\Gamma Q * \varphi\, ds$$

El símbolo de convolución se define por:

$$\varphi * \varphi = \int_0^t \varphi(x, y, t - \tau)\, \varphi(x, y, \tau)\, d\,\tau$$

$$\nabla\varphi * \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} * \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} * \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Sea φ el conjunto de todas las funciones continuas que satisfacen las condiciones del contorno Γ.

Tomando la primera variación de la funcional y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\delta\,\chi = 0;\ \text{sobre}\ \varphi$$

se cumple para una función particular φ, solamente cuando φ es solución de la ecuación de Euler:

$$\nabla(K_{ij} * \nabla \varphi_i)_j - \zeta\, c\, \varphi + \zeta\, c\, \varphi_0 + \varphi * p = 0$$

con la condición de contorno:

$$K_{ij} * \varphi_j — Q = 0 \ ; \ p = p(x, y, t)$$

siendo ζ y c constantes arbitrarias para cada parte del dominio.

La ecuación de Euler se puede transformar en la forma normal de la ecuación de difusión:

$$\nabla(K_{ij} * \nabla \varphi_i)_j — \zeta c * \dot{\varphi} — \zeta * p = 0$$

lo que justifica el uso de la expresión de Gurtin como funcional generadora.

Escribiremos la aproximación de la función φ sobre el elemento por:

$$\hat{\varphi} = \alpha_j f_j \qquad j = 1, \ldots, J$$

en donde J es el número de vértices del elemento.

Sustituyendo en la anterior ecuación los valores de la función en los vértices, determinaremos las funciones de base que definen la aproximación en notación matricial:

$$\{\hat{\varphi}\} = [N] \{\varphi^i\}$$

diferenciando con respecto a las coordenadas planas obtendremos los gradientes:

$$\{\nabla \hat{\varphi}\} = [M] \{\varphi^i\}$$

La funcional generadora se toma en forma de suma sobre todos los elementos:

$$\chi = \sum_{i=1}^{M} \int_{\Omega^i} \{\zeta c \varphi * \varphi + \nabla \varphi_i * K_{ij} * \nabla \varphi_j —2 \zeta c \varphi_0 * \varphi —$$

$$—2 \zeta * p * \varphi\} d \Omega^i — \int_{\Gamma^i} \{Q * \varphi\} ds^i$$

siendo M el número total de elementos finitos del dominio.

Sustituyendo las aproximaciones de la función y de sus gradientes en la expresión funcional, y llevando a cabo la primera variación, tendremos:

$$[B] \{\varphi(t)\} + [K] * \{\varphi(t)\} = [B] \{\varphi(_0)\} + \{Q(t)\}$$

lo que representa un conjunto de ecuaciones lineales que se resuelven para los valores nodales de la función φ en el tiempo.

Las matrices $[B^i]$, $[K^i]$ y $[Q^i]$ en su forma elemental son:

$$[B^i] = \int_{\Omega^i} \zeta c [N^i]^T [N^i] d \Omega^i$$

$$[K^i] = \int_{\Omega^i} [M^i]^T [K_{ij}^i] [M^i] d \Omega^i$$

$$[Q^i] = \int_{\Omega^i} \zeta * p [N^i]^T d \Omega^i + \int_{\Gamma^i} Q [N^i]^T ds^i$$

y

$$[B] = \sum_{i=1}^{M} [B^i]$$

$$[K] = \sum_{i=1}^{M} [K^i]$$

$$[Q] = \sum_{i=1}^{M} [Q^i]$$

3. MÉTODO DE GALERKIN.

Partiendo de las ecuaciones del apartado primero, utilizamos la misma aproximación $\{\widehat{\varphi}\} = [N] \{\varphi^i\}$ sobre los elementos finitos del dominio.

Utilizando el método de GALERKIN y considerando que la condición de contorno (3) da residuo cero, tenemos, igualando a cero la suma de los pesos residuales:

$$\int_{\Omega^i} N_i R_\Omega \, d\,\Omega^i + \int_{\Gamma_2^i} N_i R_{\Gamma_2} \, ds^i \; ; \; i = 1, 2, \ldots M$$

en donde R_Ω y R_{Γ_2} son los residuos respectivos de Ω y Γ_2.

Sustituyendo la ecuación diferencial parabólica y su condición de contorno (2) obtenemos la contribución de los residuos de los puntos nodales:

$$\int_{\Omega^i} N_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \delta\, Q - c \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\,\Omega^i -$$

$$- \int_{\Gamma_2^i} N_i \left\{ K \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \lambda (\varphi - \varphi_a) \right\} ds^i = R_i \; ; \; i = 1, \ldots, M$$

siendo λ un coeficiente de transferencia sobre Γ_2.

Utilizando el teorema de GREEN en los dos primeros términos de la primera integral y multiplicando por —1, obtenemos:

$$\int_{\Gamma^i} \left\{ K \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \delta\, N_i\, Q + c\, N_i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\,\Omega^i -$$

$$- \int_{\Gamma_2^i} N_i \left\{ K \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \lambda (\varphi - \varphi_a) \right\} ds^i = R_i \; ; \; i = 1, \ldots, M$$

Finalmente, sustituyendo las funciones de base y teniendo en cuenta que los valores de la función en los vértices dependen del tiempo:

$$\int_{\Omega^i} K \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial N_j}{\partial x} \varphi_j(t) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial N_j}{\partial y} \varphi_j(t) \right) d\,\Omega^i -$$

$$- \delta \int_{\Omega^i} N_i\, Q\, d\,\Omega^i + \int_{\Gamma_2^i} c\, N_i \sum_{j=1}^{M} N_j\, \dot{\varphi}_j(t)\, d\,\Omega^i +$$

$$+ \int_{\Gamma_2^i} \lambda\, N_i \left(\sum_{j=1}^{M} N_j\, \varphi_j(t) - \varphi_a \right) ds^i = R_i$$

que se puede escribir en notación matricial:

$$[K^i]\,\{\varphi^i\} + [B^i]\,\{\dot{\varphi}^i\} - \delta\{F^i\} = \{R^i\}$$

siendo:

$$K^i_{ij} = \int_{\Omega^i} K \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\,\Omega^i + \int_{\Gamma_2^i} \lambda\, N_i\, N_j\, ds^i$$

$$B^i_{ij} = \int_{\Omega^i} c\, N_i\, N_j\, d\,\Omega^i$$

$$f_i^i = \int_{\Omega^i} N_i\, Q\, d\,\Omega^i + \int_{\Gamma_2^i} \lambda\, N_i\, \varphi_a\, ds^i$$

Las ecuaciones elementales se ensamblan para dar el conjunto:

$$[K]\,\{\varphi\} + [B]\,\{\dot{\varphi}\} - \delta\{F\} = \{0\}$$

BIBLIOGRAFIA

1. GAVETE, L.: «Sobre la aproximación por elementos finitos de las ecuaciones diferenciales parabólicas» (Tesis Doctoral, 1977).

2. MICHAVILA, F.: «Elementos finitos curvos en espacios de Sobolev», Colección Ensayos núm. 1 Inypsa, 1975.

3. MICHAVILA, F.: «Interpolación funcional en R^n», *Gaceta Matemática*, 1977.

4. WILSON, E. L.: «Application of the Finite Element Method to heat conduction analysis», *Nuclear engineering and design*, 4 (1966), 276-286.

5. ZIENKIEWICZ, O. C.: «The Finite Element Method in Engineering Science», 2nd edn. Ed Mc Graw-Hill, New York, 1971.