UNA PRUEBA GEOMETRICA DEL TEOREMA DE SCHERK

por

BRUCE H. EDWARDS

1. INTRODUCCIÓN.

Sea V un espacio cuadrático («quadratic space») regular, de dimensión n y definido sobre un campo de característica no igual a dos. El teorema de Cartan-Dieudonné dice que toda isometría («isometry») de tal espacio puede expresarse como producto de a lo sumo n simetrías («symmetries»). Scherk [2] pudo demostrar una mejoría significante de este teorema mediante la determinación del número mínimo de simetrías necesario para expresar la isometría dada. El artículo de Scherk está escrito en términos de matrices. Snyder [4] tiene una prueba más geométrica y algunos de sus resultados aparecen aquí.

En [3] Snapper y Troyer proponen que se formule una prueba completamente geométrica. El siguiente desarrollo está escrito en el lenguaje geométrico como presentado en [1] ó [3].

2. PREPARATIVOS.

En todo lo que sigue, V es un espacio vectorial de dimensión n (n finito) sobre un campo k de característica no igual a dos. Escogemos una forma bilineal simétrica o producto interno («symmetric bilinear form») $\beta: V \times V \rightarrow k$, y escribimos $\beta(X, Y)$ como XY y $\beta(X, X)$ como X^2. V se dice un *espacio cuadrático*. Por ejemplo, si $XY = 0$, por todo X, Y de V, entonces V es un *espacio nulo* («null space»).

Un vector X de V se dice *isótropo* («isotropic») si $X^2 = 0$. Puesto que la característica de k es diferente que dos, es bien conocido que un espacio cuadrático es un espacio nulo si y solamente si todos los vectores son isótropos. Dos vectores, X y Y, son *ortogonales* («orthogonal») si $XY = 0$. Dos subespacios, U y W, de V se dicen ortogonales si $XY = 0$, para todo X en U y todo Y en W. El *complemento ortogonal* («orthogonal complement») de U es

$$U^* = \{Y \varepsilon V : XY = 0, \text{ para todo } X \varepsilon U\}$$

Si U es un espacio nulo, entonces $U \subseteq U^*$.

V se dice *regular* («nonsingular») si el único vector ortogonal a todos los vectores es el vector 0. Equivalentemente, si $A_1, \ldots, A_n$ es una base de V, entonces V es regular si y solamente si $\det(g_{ij}) \neq 0$, donde $g_{ij} = A_i A_j$. Suponemos, en todo este artículo, que V es regular.

Existen espacios cuadráticos regulares que contienen muchos vectores isótropos. Por ejemplo, un *plano hiperbólico* («hyperbolic plane») es un espacio de dimensión dos con dicha propiedad. Todo plano hiperbólico tiene una base hiperbólica M, N que satisface $M^2 = N^2 = 0$ y $MN = 1$.

Si V es un espacio regular, no es difícil mostrar que para todo subespacio U de V, $\dim U + \dim U^* = n$. Además, si U es regular, también lo es U^* y $V = U \perp U^*$, la suma directa de subespacios ortogonales.

Una *isometría* («isometry») $\sigma : V \to W$ es un isomorfismo que preserva el producto interno: $(\sigma X)(\sigma Y) = XY$, para todo X, Y en V. Si $\sigma : V \to V$ es una isometría de V, entonces $\det(\sigma) = \pm 1$. En el primer caso, σ se llama una *rotación* («rotation»); en el segundo caso, σ es una *reflexión* («reflection»). Si $V = U \perp T$ y $\sigma : U \to U$ y $\lambda : T \to T$ son isometrías de U y T, respectivamente, entonces puede formarse la isometría $\rho \perp \lambda$ de V en una manera natural. La isometría idéntica de V se denota por 1.

Por ejemplo, si A es un vector no isótropo de V, entonces $V = \langle A \rangle \perp \langle A \rangle^*$, y podemos definir la *simetría* («symmetry») τ_A con respecto al hiperplano $\langle A \rangle^*$: $\tau_A = -1_{\langle A \rangle} \perp 1_{\langle A \rangle^*}$. Es claro que τ_A es una reflexión y $(\tau_A)^2 = 1$.

Sea $\sigma : V \to V$ una isometría de V. El *espacio fijo* («fixed space») de σ se denota por $F(\sigma)$, y se observa que $F(\sigma) = \ker(\sigma - 1)$. Pero $\ker(\sigma - 1)$ es ortogonal a $\operatorname{im}(\sigma - 1)$. (*Demostración:* si $A \in \ker(\sigma - 1)$ y $B \in \operatorname{im}(\sigma - 1)$, entonces existe un $C \in V$ tal que $\sigma C - C = B$. Ahora, $AB = A(\sigma C - C) = A(\sigma C) - AC = (\sigma A)(\sigma C) - AC = 0$.) Nos sigue inmediatamente que $\operatorname{im}(\sigma - 1) = F^*(\sigma)$.

3. Demostraciones de los temas.

De ahora en adelante, σ es una isometría de un espacio cuadrático regular V de dimensión n y definido sobre un campo k de característica no igual a dos. $F(\sigma)$ es el espacio fijo de σ y $F^*(\sigma)$ el complemento ortogonal de $F(\sigma)$. Pongamos $\dim F^*(\sigma) = S$ y entonces $\dim F(\sigma) = n - S$.

Lema 1. La isometría σ no puede expresarse como producto de menos de S simetrías.

Demostración. Primero observamos que si $H_1, H_2, \ldots H_r$ son hiperplanos de V, entonces $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r) \geqslant n - r$. Además, si $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r$, entonces cada τ_i fija un hiperplano H_i. Por eso, $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r \subseteq F(\sigma)$. Tomando dimensiones, $n - S \geqslant n - r$; es decir, $r \geqslant S$. ■

La prueba del teorema de Scherk está basada, fundamentalmente, en el lema siguiente. El caso 1 es de Snyder.

Lema 2. Sea σ una isometría, pero no una simetría. Si $F^*(\sigma)$ no es un espacio nulo, existe un vector no isótropo B en $F^*(\sigma)$ tal que $F^*(\tau_B\sigma)$ tampoco es nulo.

Demostración. Escoja un vector no isótropo A en $F^*(\sigma)$ y considere $\tau_A\sigma$. Si $F^*(\tau_A\sigma)$ no es nulo, ya terminamos. Entonces, supongamos que $F^*(\tau_A\sigma)$ es un espacio nulo. Esto inmediatamente implica que $F^*(\tau_A\sigma) \subseteq F(\tau_A\sigma)$. Además, tenemos $F(\sigma) \subseteq F(\tau_A\sigma)$ (equivalentemente, $F^*(\tau_A\sigma) \subseteq F^*(\sigma)$), puesto que si $X \in F(\sigma)$, entonces $X \in \langle A\rangle^*$ y $X \in F(\tau_A\sigma)$.

Caso 1: $A \notin F(\tau_A\sigma)$ (Snyder).

Existe un vector isótropo M de $F^*(\tau_A\sigma)$ tal que $AM \neq 0$. A y M forman un plano hiperbólico P y podemos encontrar otro vector isótropo N tal que $\langle M, N\rangle$ es una base hiperbólica para P. Hay un escalar $a \neq 0$, tal que $\langle A\rangle = \langle aM+N\rangle$, y podemos suponer que $A = aM+N$. Tome $B = aM - N$. Observamos que $B^2 = -2a \neq 0$, $AB = 0$ y $B \in F^*(\sigma)$. Resta verificar que $F^*(\tau_B\sigma)$ no es nulo. Puesto que $(1 - \tau_B\sigma)A \in \operatorname{im}(1 - \tau_B\sigma) = F^*(\tau_B\sigma)$, es suficiente mostrar que $(A - \tau_B\sigma A)^2 \neq 0$. Pero tenemos

$$\begin{aligned} A - \tau_B\sigma A &= A - \tau_B\tau_A(\tau_A\sigma(aM+N)) = A - \tau_B\tau_A(aM+\tau_A\sigma N) \\ &= A - \tau_B\tau_A(aM+N+\tau_A\sigma N - N) = A - \tau_B\tau_A(A) + \tau_B\tau_A(N - \tau_A\sigma N). \end{aligned}$$

Pero $\tau_B\tau_A(A) = \tau_B(-A) = -A$, puesto que $AB = 0$. Además, $(N - \tau_A\sigma N)$ es ortogonal al plano P, puesto que los vectores M y $(N - \tau_A\sigma N)$ están en $F^*(\tau_A\sigma)$, que es nulo, y entonces $M(N - \tau_A\sigma N) = 0$. También, $(N - \tau_A\sigma N)^2 = 2N(N - \tau_A\sigma N) = 0$ que implica $N(N - \tau_A\sigma N) = 0$. Por eso, $\tau_B\tau_A(N - \tau_A\sigma N) = N - \tau_A\sigma N$ y tenemos $A - \tau_B\sigma A = 2A + (N - \tau_A\sigma N)$ y, finalmente, $(A - \tau_B\sigma A)^2 = 4\,A^2 \neq 0$.

Caso 2: $A \in F(\tau_A\sigma)$.

Sea M un vector no igual a 0 de $F^*(\tau_A\sigma)$. Esto es posible puesto que σ no es una simetría. Es claro que $AM = 0$, y entonces $M \in \langle A\rangle^*$. Sea $A_1 = A + M \in F^*(\sigma)$. $A_1^2 \neq 0$, entonces podemos formar la simetría τ_{A_1}. Ahora observamos que $\tau_{A_1}\sigma(A_1) \neq A_1$:

$$\begin{aligned} \tau_{A_1}\sigma A_1 &= \tau_{A_1}\sigma(A+M) = \tau_{A_1}\tau_A(\tau_A\sigma(A+M)) = \tau_{A_1}\tau_A(A+M) \\ &= \tau_{A_1}(-A+M) = \tau_{A_1}(-A-M+2M) = \tau_{A_1}(-A-M) + \tau_{A_1}(2M) \\ &= A_1 + \tau_{A_1}(2M) \neq A_1. \end{aligned}$$

Entonces podemos usar A_1 en vez del vector A que escogimos al principio. Si $F^*(\tau_{A_1}\sigma)$ no es nulo, no hay más que hacer. Pero si es nulo, estamos en el caso 1 de la prueba, puesto que $A_1 \notin F(\tau_{A_1}\sigma)$. ■

El siguiente lema es conocido, pero lo incluimos para que este artículo sea completo.

Lema 3. Si τ_B es una simetría, entonces para todo X en V,

$$\tau_B X = X - \left(\frac{2BX}{B^2}\right)B$$

Demostración. Escriba

$$X = \frac{BX}{B^2} B + \left(X - \frac{BX}{B^2} B \right)$$

Es muy fácil verificar que

$$\left(X - \frac{BX}{B^2} B \right)$$

está en $<B>^*$, y entonces

$$\tau_B X = \tau_B \left(\frac{BX}{B^2} B \right) + \tau_B \left(X - \frac{BX}{B^2} B \right) = - \frac{BX}{B^2} B +$$

$$+ X - \frac{BX}{B^2} B = X - \frac{2BX}{B^2} B. \ \blacksquare$$

Lema 4. Sea σ una isometría, pero no una simetría. Si $F^*(\sigma)$ no es nulo, entonces existe una simetría τ_B tal que

(i) $F^*(\tau_B \sigma)$ tampoco es nulo,

y

(ii) $\dim F^*(\tau_B \sigma) = S - 1$.

Demostración. Sea B el vector de Lema 2. Entonces, $B \varepsilon F^*(\sigma)$, $B^2 \neq 0$ y $F^*(\tau_B \sigma)$ no es nulo. Resta mostrar que $\dim F^*(\tau_B \sigma) = S - 1$.

Hemos visto que $F^*(\tau_B \sigma) \subseteq F^*(\sigma)$. Puesto que $B \varepsilon F^*(\sigma) = \mathrm{im}(\sigma - 1)$, existe $D \varepsilon V$ tal que $B = \sigma D - D$. Entonces, $B^2 = (\sigma D - D)^2 = 2D(D - \sigma D) = - 2BD$. Por el Lema 3, tenemos

$$\tau_B D = D - \frac{2BD}{B^2} B = D + B = \sigma D$$

Entonces, $\tau_B \sigma D = D$ y $D \varepsilon F(\tau_B \sigma)$. Pero es claro que $D \notin F(\sigma)$, y hemos mostrado que $\dim F(\tau_B \sigma) \geqslant \dim F(\sigma) + 1 = n - S + 1$ y $\dim F^*(\tau_B \sigma) \leqslant \leqslant S - 1$.

Pero, $F(\tau_B) \cap F(\tau_B \sigma) \subseteq F(\sigma)$, y tomando dimensiones tenemos $\dim(F(\tau_B) \cap F(\tau_B \sigma)) \leqslant \dim F(\sigma)$. Entonces, $\dim F(\tau_B \sigma) - 1 \leqslant \dim F(\sigma)$ que implica que $\dim F^*(\tau_B \sigma) \geqslant S - 1$. Finalmente, hemos mostrado que $\dim F^*(\tau_B \sigma) = S - 1$. $\blacksquare$

4. El Teorema de Scherk.

Teorema. Sea σ una isometría de V.

(i) Si $F^*(\sigma)$ no es nulo, entonces σ es el producto de S, y no menos de S simetrías.

(ii) Si $\sigma \neq 1$ y $F^*(\sigma)$ es nulo, entonces σ es el producto de $S + 2$ simetrías y no menos de $S + 2$ simetrías.

Demostración. (i) Mencionamos primero que si $\sigma = 1$, entonces S no está definido. Para demostrar el teorema usamos inducción matemática sobre S. Si $S = 1$, entonces σ es una simetría y el teorema se verifica fácilmente. Por inducción, suponemos que el teorema es verdad para $S - 1$. Por el Lema 4, existe una simetría τ_B tal que $F^*(\tau_B \sigma)$

no es nulo y dim $F^*(\tau_B\sigma) = S - 1$. Empleando la hipótesis de inducción, tenemos $\tau_B\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{S-1}$ para simetrías τ_i. Entonces $\sigma = \tau_B \tau_1 \ldots \tau_{S-1}$. Combinando esto con el Lema 1, caso (i) del teorema, está demostrado.

(ii) Supongamos que $F^*(\sigma)$ es nulo. Observamos primero que para todo vector no isótropo A de V, tenemos $\langle A\rangle^* \cap F(\sigma) = F(\tau_A\sigma)$. Para ver esto, tome $X \in \langle A\rangle^* \cap F(\sigma)$. Es claro que $\tau_A\sigma X = \tau_A X = X$, y entonces $X \in F(\tau_A\sigma)$. Ahora tome $X \in F(\tau_A\sigma)$. Entonces $\tau_A X = \sigma X$ y usando el Lema 3,

$$\tau_A X = X - \frac{2AX}{A^2} A$$

Por eso,

$$\sigma X - X = \tau_A X - X = -\frac{2AX}{A^2} A$$

Pero, $\sigma X - X \in \operatorname{im}(\sigma - 1) = F^*(\sigma)$ que es nulo. Entonces, $(\sigma X - X)^2 = 0$

$$= \left(-\frac{2AX}{A^2} A\right)^2 \Rightarrow AX = 0.$$

Finalmente, $\tau_A X = X = \sigma X$ y $X \in \langle A\rangle^* \cap F(\sigma)$. Hemos mostrado que para todo vector no isótropo A, $\langle A\rangle^* \cap F(\sigma) = F(\tau_A\sigma)$.

Se tiene ahora que $F^*(\tau_A\sigma) = (\langle A\rangle^* \cap F(\sigma))^*$. Pero es fácil ver que $(\langle A\rangle^* \cap F(\sigma))^* = \langle A\rangle + F^*(\sigma)$ que implica $F^*(\tau_A\sigma) = \langle A\rangle + F^*(\sigma)$. Puesto que $A \notin F^*(\sigma)$, debemos tener dim $F^*(\tau_A\sigma) = S + 1$. Más aún, $F^*(\tau_A\sigma)$ no es nulo, porque contiene el vector A.

Entonces podemos usar el caso (i) de este teorema con la isometría $\tau_A\sigma$, y obtenemos $\tau_A\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{S+1} \Rightarrow \sigma = \tau_A\tau_1 \ldots \tau_{S+1}$ y hemos expresado σ como el producto de $S + 2$ simetrías.

Finalmente, σ no puede expresarse como producto de menos que $S + 2$ simetrías. Para mostrar esto, empleamos un argumento muy bonito de Snyder. En [3], pág. 261, hay otro desarrollo que está basado en el hecho que σ debe ser una rotación. Entonces, supongamos que $\sigma = \tau_{A_1} \tau_{A_2} \ldots \tau_{A_r}$. Ahora, $\tau_{A_1} \sigma = \tau_{A_2} \ldots \tau_{A_r}$ y por el Lema 1, dim $F^*(\tau_{A_1} \sigma) \leqslant r - 1$. Pero A_1 es un vector no isótropo y como observamos antes, $\langle A_1\rangle^* \cap F(\sigma) = F(\tau_{A_1} \sigma) \Rightarrow$ dim $F^*(\tau_{A_1} \sigma) = S + 1$. Entonces, $S + 1 \leqslant r - 1 \Rightarrow S + 2 \leqslant r$. ■

BIBLIOGRAFIA

1. ARTIN, E.: *Geometric Algebra*, Interscience, New York, 1957.
2. SCHERK, P.: «On the Decomposition of Orthogonalities into Symmetries», *Proceedings of the AMS*, vol. n.º 4, August 1950, páginas 481-491.
3. SNAPPER and TROYER: *Metric Affine Geometry*, Academic Press, 1971.
4. SNYDER, H.: «Factorization of Isometries into Symmetries», to appear in *Journal of Undergraduate Mathematics*.