TIEMPO DE TRANSICION EN LOS SISTEMAS ARMONICO - EXPONENCIALES

por

FERNANDO MUÑOZ VALCARCEL

1. TRAYECTORIAS Y SOLUCIONES DE UN SISTEMA AUTONOMO PLANO

Los resultados de este trabajo han surgido ante la necesidad de estudiar ciertas propiedades de los sistemas autónomos que aparecen al tratar de resolver problemas de tiempo óptimo del tipo armónico-exponencial. En dichos sistemas, las trayectorias óptimas verifican el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= v(x^1, x^2) \cdot \cos(U(x^1, x^2) - k) = F_1(x^1, x^2, k) \\ \frac{dx^2}{dt} &= v(x^1, x^2) \cdot \operatorname{sen}(U(x^1, x^2) - k) = F_2(x^1, x^2, k) \end{aligned} \qquad [1]$$

donde $v(x^1, x^2)$ es una función con valores reales, estrictamente positiva y cuyo logaritmo neperiano es armónico en el subconjunto abierto, acotado y simplemente conexo G de R^2, $U(x^1, x^2)$ es una conjugada armónica de $ln(v)$ en G y k es un parámetro que, por las características del sistema [1], podemos suponer variando en el intervalo cerrado $[0,2\,\pi]$.

El problema fundamental que se plantea, en relación con el sistema anterior, es el de averiguar si de las infinitas soluciones que en el instante $t = t_0$ pasan por el punto $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$, existe una que pase por $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ en algún instante t_1, finito y mayor que t_0, y que esté contenida en la clausura de G.

Los resultados de carácter general sobre sistemas autónomos que utilizaremos pueden verse en [4], y se darán sin demostración, salvo que ésta presente interés especial.

Las curvas integrales de todo sistema autónomo tienen la siguiente propiedad:

Si $(\beta_1(t), \beta_2(t))$ es una solución de un sistema autónomo en el intervalo $[t_0, t_1)$, la función $(\beta_1(t-h), \beta_2(t-h))$ es otra solución en el intervalo $[t_0 + h, t_1 + h)$, cualquiera que sea el número real h.

En otros términos: toda traslación, a lo largo del eje $0t$, transforma curvas integrales en curvas integrales.

Para un sistema autónomo cualquiera

$$\frac{dx^i}{dt} = F_i(x^1, x^2), \; i = 1, 2 \qquad [2]$$

existen soluciones constantes si y sólo si el sistema

$$F_i(x^1, x^2) = 0, \; i = 1, 2$$

admite alguna solución. Es evidente que el sistema [1] no puede poseer soluciones constantes.

Llamaremos trayectoria a la proyección ortogonal sobre el plano $t = 0$ de cualquier curva integral. Cada trayectoria es imagen de infinitas curvas integrales: todas las que se obtienen de una dada por traslación a lo largo del eje $0t$.

Habiéndose asegurado de que las funciones F_1 y F_2 verifican las condiciones suficientes para que por cada punto (t_0, x_0^1, x_0^2) pase una, y sólo una, curva integral, por cada punto x_0 de coordenadas (x_0^1, x_0^2) pasará una única trayectoria. (Este es el caso del sistema [1] que, por ser diferenciable, es Lipschitciano.)

Siendo x_0 un punto dado de G y $M(x_0)$ la trayectoria que pasa por él, entre las infinitas curvas integrales que tienen por imagen a $M(x_0)$ elegiremos aquélla que corta al plano $t = t_0$ en el punto (t_0, x_0, x_0^2). Es decir, la curva integral $(t, \beta_1(t), \beta_2(t))$ verifica $(\beta_1(t_0), \beta_2(t_0)) = (x_0^1, x_0^2)$.

Puesto que la imagen de una curva integral constante es un único punto del plano $t = t_0$, puede ocurrir que dicho punto sea el $(t_0, 0, 0)$. En tal caso, llamaremos singulares a las trayectorias con dicha propiedad.

Si M es una curva integral no singular, no existirán puntos en los que la tangente sea paralela la eje $0t$. Por tanto, la tangente a M, en un punto (t, x), se proyecta ortogonalmente en el plano $t = 0$ en la tangente en x a la trayectoria imagen de M. Una trayectoria no singular tiene, en consecuencia, tangente en cada uno de sus puntos.

Es interesante observar que en el estudio de las trayectorias del sistema [1] la función $v(x^1, x^2)$ no desempeña ningún papel esencial, es decir, las trayectorias del sistema [1] coinciden con las trayectorias del sistema que se obtiene al suprimir en aquél la función $v(x^1, x^2)$. Esta propiedad es consecuencia del próximo lema.

1.1. Lema. Toda solución del sistema [1] se obtiene mediante una única cuadratura de una solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dz} &= \cos(U - k) \\ \frac{dx^2}{dz} &= \operatorname{sen}(U - k) \end{aligned} \qquad [3]$$

Demostración. Sea $(\beta_1(z), \beta_2(z))$ una solución de [3] definida en $[z_0, z_1]$, que verifica las condiciones iniciales $(x^1{}_0, x^2{}_0) = (\beta_1(z_0), \beta_2(z_0))$. Para cada z del intervalo $[z_0, z_1]$ se define una función $\alpha(z)$ por la siguiente igualdad:

$$t - t_0 = \alpha(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{v(\beta_1(s), \beta_2(s))} \qquad [4]$$

La función $z \to \alpha(z)$ es diferenciable y estrictamente creciente en el intervalo $[z_0, z_1]$, transformando dicho intervalo en el $[t_0, t_1]$, donde t_0 es dado y $t_1 = \alpha(z_1)$. Por tanto, existe la función inversa $t \to \alpha^{-1}(t)$, que es diferenciable en $[t_0, t_1]$ y que transforma dicho intervalo en el $[z_0, z_1]$. Entonces, la función

$$(\beta_1(\alpha^{-1}(t)), \beta_2(\alpha^{-1}(t))) \qquad [5]$$

es una solución del sistema [1], está definida en el intervalo $[t_0, t_1]$ y en el instante $t = t_0$ pasa por el punto $(x^1{}_0, x^2{}_0)$. En efecto, se comprueba sin dificultad que [5] está definida en todo el intervalo $[t_0, t_1]$ y que satisface las condiciones iniciales dadas. Por otra parte, al ser $(\beta_1(z), \beta_2(z))$ una solución de [3], se verificará:

$$\frac{d\beta_1(z)}{dt} = \cos(U(\beta_1(z), \beta_2(z)) - k)$$

$$\frac{d\beta_2(z)}{dz} = \operatorname{sen}(U(\beta_1(z), \beta_2(z)) - k)$$

de donde, sustituyendo z y dz convenientemente, se obtiene

$$\frac{d\beta_1(\alpha^{-1}(t))}{dt} = v(\beta_1(\alpha^{-1}(t)), \beta_2(\alpha^{-1}(t))) \cdot \cos(U(\beta_1(\alpha^{-1}(t)), \beta_2(\alpha^{-1}(t)) - k)$$

$$\frac{d\beta_2(\alpha^{-1}(t))}{dt} = v(\beta_1(\alpha^{-1}(t)), \beta_2(\alpha^{-1}(t))) \cdot \operatorname{sen}(U(\beta_1(\alpha^{-1}(t)), \beta_2(\alpha^{-1}(t)) - k)$$

lo que prueba la tesis.

Sin más que invertir los papeles de t y de z, en el razonamiento anterior, quedaría probado el siguiente

1.2. Lema. Toda solución del sistema [3] se obtiene mediante una única cuadratura de una solución del sistema [1].

2. TIEMPO PASADO EXTREMO Y TIEMPO FUTURO EXTREMO EN UN SISTEMA ARMONICO-EXPONENCIAL

Dado un sistema diferencial, no necesariamente autónomo, bajo ciertas condiciones es posible asegurar que por cada punto $(x^1{}_0, x^2{}_0)$, de un cierto conjunto, pasa una, y sólo una, trayectoria en un instante dado t_0. En otras palabras, existen una función $(\beta_1(t), \beta_2(t))$ y un intervalor (a, b), que contiene a t_0, tales que la función satisface el sistema para todo $t \in (a, b)$ y además $(x^1{}_0, x^2{}_0) = (\beta_1(t_0), \beta_2(t_0))$.

Para un sistema y un punto $x_0 = (x^1{}_0, x^2{}_0)$, dados, representaremos por $(t-, t+)$ mayor intervalo abierto al que se puede prolongar la solución que pasa por x_0 en el instante t_0. Los valores $t-$ y $t+$ reciben habitualmente los nombres tiempo pasado extremo y tiempo futuro extremo, respectivamente, pudiendo ser $t- = -\infty$ y $t+ = +\infty$.

El próximo teorema es una versión para sistemas autónomos de un teorema demostrado por S. Faedo. La demostración puede verse en [4].

2.1. TEOREMA. Si las funciones F_1 y F_2, del sistema [2], son continuas en todo el plano, si existe una función real y continua $w(t, u)$, para todo $u \in [0, +\infty)$ y todo $t \in (a, b)$ y tal que

a) $u \cdot w(t, u)$ es no decreciente para todo $t \in (a, b)$ con respecto a u;

b) para todo (x^1, x^2) y todo $t \in (a, b)$ se verifica

$$x^1 \cdot F_1(x^1, x^2) + x^2 \cdot F_2(x^1, x^2) \leqslant |(x^1, x^2)| \cdot w(t, |(x^1, x^2)|)$$

c) todas las curvas integrales de la ecuación

$$\frac{du}{dt} = w(t, u)$$

tienen el tiempo futuro extremo $t+ = b$;

entonces también es $t+ = b$ para todas las curvas integrales del sistema [2].

Sustituyendo a) por

a') $u \cdot w(t, u)$ es no creciente para todo $t \in (a, b)$ con respecto a u,

y poniendo en c) $t- = a$, la conclusión del teorema es que también vale $t- = a$ para todas las curvas integrales del sistema [2].

2.2. COROLARIO. Los valores $t+$ y $t-$, para cualquier curva integral del sistema [1], son $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente.

En efecto, tomemos como función $w(t, u)$ la función constante $w(t, u) = 1$, que es continua y no decreciente con respecto a u para todo $t \in (-\infty, +\infty)$ y $u \in [0, +\infty)$. La condición b) se prueba sin más que desarrollar la expresión

$$(x^1 \cdot \operatorname{sen}(U - k) - x^2 \cdot \cos(U - k))^2 \geqq 0$$

y trasponer términos.

Puesto que las curvas integrales de la ecuación

$$\frac{du}{dt} = 1$$

son las rectas $u = t + \text{cte}$, para ellas es $t+ = +\infty$ y, consecuentemente, también lo será para las soluciones del sistema [3]. Finalmente, si llamamos $\bar{t}$ a la variable independiente del sistema [1], $\bar{t}$ se relaciona con t(del sistema [3]) por la igualdad

$$\bar{t} - \bar{t}_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{v(\beta_1(s), \beta_2(s))}$$

siendo $(\beta_1(t), \beta_2(t))$ una solución de [3]. De aquí que sea el tiempo futuro extremo del sistema [1] también $+\infty$.

Con análogos razonamientos se prueba que $\bar{t}^- = -\infty$.

2.3. LEMA. Sea $(\beta_1(t), \beta_2(t))$ una solución del sistema [1] para un $k = k_0$ fijo. Entonces, uno al menos de los límites

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \beta_1(t) \ , \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \beta_2(t)$$

no existe o es ∞. (Análogamente, para $t \longrightarrow -\infty$.)

Demostración. Supongamos que ambos existiesen y fuesen finitos. Sean y_1 e y_2, respectivamente, sus valores. Entonces habrá tres posibilidades:

a) Las dos funciones, β_1 y β_2, son monótonas en sendos entornos de $t = +\infty$.

b) En todo entorno de $t = +\infty$ las dos funciones β_1 y β_2 cambian infinitas veces de crecientes a decrecientes.

c) Una de ellas verifica la condición *a*) y la otra, la condición *b*).

Si se verifica *a*)

$$F_i(y_1, y_2, k_0) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} F_i(\beta_1(t), \beta_2(t), k_0) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{d\beta_i(t)}{dt} = 0$$

para $i = 1, 2$, por lo que (y_1, y_2) sería un punto singular del sistema [1] al verificarse

$$F_1(y_1, y_2, k_0) = F_2(y_1, y_2, k_0) = 0$$

En el caso *b*), aplicando el teorema de Rolle, se comprueba que existen las sucesiones

$$0 < t_0 < t_1 < \ldots \rightarrow +\infty$$
$$0 < t'_0 < t'_1 < \ldots \rightarrow +\infty$$

tales que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{d\beta_1(t)}{dt}\right]_{t = t_n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} \left[\frac{d\beta_2(t)}{dt}\right]_{t = t'_n} = 0$$

y, por tanto, se verifican:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{d\beta_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{d\beta_2(t)}{dt} = 0$$

También en este caso se cumplirá

$$\lim_{t\to+\infty} F_i(\beta_1(t), \beta_2(t), k_0) = \lim_{t\to+\infty} \frac{d\beta_i(t)}{dt} = 0,\ i = 1, 2$$

de donde

$$F_1(y_1, y_2, k_0) = F_2(y_1, y_2. k_0) = 0$$

siendo, de nuevo, el punto (y_1, y_2) singular.

En el caso *c*) se procederá de modo análogo con cada una de las dos funciones $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$, llegándose a igual contradicción. Esto completa la demostración del lema.

Una curva integral $(\beta_1(t), \beta_2(t))$ del sistema [2] se llama periódica si existe un número real $e > 0$, tal que:

$$(\beta_1(t+e), \beta_2(t+e)) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$$

para todo $t \in (-\infty, +\infty)$ (supuesta la existencia de β_1 y de β_2 en todo el eje $0t$; lo que ocurre, por ejemplo, con las soluciones del sistema [1]).

Si el subconjunto del plano $t = 0$

$$\{(x^1, x^2) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) : t > t_0\}$$

es acotado, para una cierta curva integral $(\beta_1(t), \beta_2(t))$, se dice que la correspondiente trayectoria es acotada en el futuro. (Similar definición tienen las trayectorias acotadas en el pasado sin más que sustituir en la anterior $t > t_0$ por $t < t_0$.)

La proyección sobre el plano $t = 0$ de una curva integral periódica, no constante, recibe el nombre de círculo.

2.4. Teorema (de Bendixson). Toda región del plano $t = 0$, limitada por un círculo del sistema [2], contiene al menos un punto singular.

2.5. Teorema. La condición necesaria y suficiente para que el sistema [2] admita soluciones periódicas es que admita al menos una trayectoria acotada en el futuro o en el pasado.

2.6. Corolario. Las trayectorias del sistema [1] no son acotadas en el pasado ni en el futuro.

Demostración. Por reducción al absurdo. Si existiese una trayectoria del sistema [1], acotada en el pasado o en el futuro, existirían curvas integrales periódicas por el teorema 2.5. Si dichas curvas integrales no son constantes, la trayectoria sería un círculo, existiendo al menos un punto singular en el interior del recinto plano limitado por él (por 2.4.). Si las curvas integrales fuesen constantes, la trayectoria sería también singular. En ambos casos, la existencia de puntos singulares es la contradicción que buscábamos.

3. DOS TEOREMAS SOBRE TIEMPO DE TRANSICION

Las trayectorias del sistema [1] están incluidas entre las soluciones de la ecuación diferencial

$$\operatorname{sen}(U - k)\, dx^1 - \cos(U - k)\, dx^2 = 0 \qquad [6]$$

obtenida de dicho sistema por eliminación de dt.

Fijado un valor de k, sea k_0, para cualquier x_0 del conjunto (apartado 5)

$$\overline{G} - \bigcup_{p \in C(k_0)} c(k_0, p)$$

la función $tg(U - k_0)$ es Lipschitciana en todo un entorno de x_0 y, por tanto, existe una única solución de la ecuación

$$\frac{dx^2}{dx^1} = tg(U - k_0) \qquad [7]$$

que pase por t_0.

Si x_0 pertenece al conjunto

$$\bigcup_{p \in C(k_0)} c(k_0, p)$$

en virtud del lema 5.1, x_0 pertenecería también al conjunto

$$\overline{G} - \bigcup_{p \in D(k_0)} d(k_0, p)$$

y la función cotg $(U - k_0)$ sería Lipschitciana en un entorno de x_0. Por tanto, por x_0 pasará una única solución de la ecuación

$$\frac{dx^1}{dx^2} = \operatorname{cotg}(U - k_0) \qquad [8]$$

Sea x_0 un punto de una de las bandas $C_i(k_0)$ (apartado 5), para algún k_0, y sea $M(k_0)$ la trayectoria correspondiente. Entonces:

3.1. Lema. Para todo $x_1 \in M(x_0) \cdot C_i(k_0)$ el tiempo de transición de x_0 a x_1 es finito.

Demostración. Siendo $x_0 = (x^1_0, x^2_0)$, $x_1 = (x^1_1, x^2_1)$ y $x^2 = f(x^1)$ la ecuación de la trayectoria $M(x_0)$ en el intervalo $[x^1_0, x^2_0]$, el tiempo de transición de x_0 a x_1, a lo largo de $M(x_0)$, viene dada por

$$t_1 = t_0 = \int_{x^1_0}^{x^1_1} \frac{dx^1}{v(x^1, f(x^1)) \cdot \cos(U(x^1, f(x^1)) - k_0)} \qquad [9]$$

Al ser integrando una función continua de la única variable x^1 en el intervalo cerrado $[x^1_0, x^1_1]$, la integral anterior existe y toma un valor finito.

Análogamente, siendo x_0 un punto de una de las bandas $D_i(k_0)$, para algún k_0, y siendo $M(x_0)$ la trayectoria que pasa por x_0, se verifica el siguiente

3.2. Lema. Para todo $x_1 \in M(x_0) \cdot D_i(k_0)$ el tiempo de transición de x_0 a x_1 es finito.

Los dos resultados anteriores se pueden ampliar por medio del siguiente

3.3. Teorema. Si existe una trayectoria M uniendo los puntos x_0 y x_1 de $\overline{G}$, el tiempo de transición de x_0 a x_1, a lo largo de M es finito.

Demostración. Supongamos que la trayectoria M es la correspondiente al valor k_0 del parámetro k y sean

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_r\} \quad \text{y} \quad \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$$

los subconjuntos de $C(k_0)$ y de $D(k_0)$, respectivamente, para los que las intersecciones

$$M \cdot c(k_0, p_i) \quad \text{y} \quad M \cdot d(k_0, q_j)$$

para $i = 1, 2, \ldots, r$ y $j = 1, 2, \ldots, s$, son no vacías.

Denotemos por $A_1, A_2, \ldots, A_a$ los puntos en los que las curvas $c(k_0, p_i)$ cortan a la trayectoria M, y por $B_1, B_2, \ldots, B_b$ los puntos en los que las curvas $d(k_0, q_j)$ cortan a M. Evidentemente, se verifican las relaciones $a \geq r$ y $b \geq s$. Además, puesto que M no puede ser cerrada ni contener arcos cerrados, existe una única forma de ordenar los puntos anteriores cuando M se recorre de x_0 a x_1. Representemos por

$$P_1, P_2, \ldots, P_\pi$$

la ordenación citada, donde los puntos P_i cumplen las siguientes condiciones:

a) para $i = 1, 2, \ldots, \pi$, $P_i \in \{A_1, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b, x_0, x_1\}$,
b) P_i es anterior a P_{i+1} al recorrer M de x_0 a x_1,
c) entre P_i y P_{i+1} no existen elementos del conjunto definido en el apartado *a*).

Sea, finalmente, $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\pi-1}\}$ un conjunto de $\pi - 1$ puntos que verifican la siguiente condición:

Q_i pertenece al arco abierto de M de extremos P_i, P_{i+1}. Puesto que, en cada uno de los arcos de M,

$$x_0\, Q_1,\ Q_1Q_2,\ \ldots,\ Q_{\pi-2}Q_{\pi-1},\ Q_{\pi-1}x_1$$

se verifican las condiciones de uno de los lemas 3.1 y 3.2, y sin más que tener en cuenta que el tiempo de transición de x_0 a x_1 es la suma de los tiempos de transición a lo largo de cada uno de estos arcos, el teorema queda probado.

Hasta ahora hemos dado el nombre de trayectoria a la proyección sobre el plano $t = 0$ de una solución del sistema [1] o, también, a una solución de la ecuación [6], para un cierto valor k_0 del parámetro k. El concepto de trayectoria necesita ser ampliado por dos razones de distinta naturaleza:

a) porque en un problema de tiempo óptimo las soluciones naturales no requieren una pendiente continua, y

b) con la definición que hemos venido utilizando no podemos garantizar que cualesquiera puntos de G puedan ser unidos por una trayectoria.

Conservaremos la palabra trayectoria en el sentido en que la hemos venido utilizando.

4. DOS TEOREMAS DE EXISTENCIA DE CAMINOS

4.1. DEFINICIÓN. De un conjunto finito de curvas $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ se dirá que constituyen una trayectoria poligonal que parte de x_0, si existen las constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$, iguales o no, tales que:

a) cada M_i es una solución de [6] para $k = k_i$;
b) $M_i \cdot M_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
c) $x_0 \in M_1$.

Observemos que si x_1 es un punto de la curva M_n, existen diferentes formas de ir desde x_0 hasta x_1, deducidas de una misma trayectoria poligonal: basta que alguno de los conjuntos $M_i \cdot M_j$, $j \neq i + 1$ sea no vacío. Además, como caso particular, puede ser $n = 1$.

Sea $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ una trayectoria poligonal que parte de x_0 y sea x_1 un punto de M_n no perteneciente a M_{n-1}.

4.2. DEFINICIÓN. Llamaremos camino uniendo x_0 con x_1 a todo conjunto finito de arcos de curva

$$x_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{m-2}Q_{m-1}, Q_{m-1}Q_m, Q_mx_1 \qquad [10]$$

determinado por los puntos $x_0, Q_1, \ldots, Q_m, x_1$, tal que:

a) Q_iQ_{i+1} está contenido en un M_j, para algún $j = 1, 2, \ldots, n$,
b) x_0Q_1 está contenido en un M_j, para algún $j = 1, 2, \ldots, n$,
c) Q_mx_1 está contenido en un M_j, para algún $j = 1, 2, \ldots, n$,
d) la intersección de dos cualesquiera de los arcos [10] o es vacía o contiene un único punto.

El número de caminos correspondientes a una trayectoria poligonal es distinto de cero y finito. De entre todos ellos existe uno, al menos, a lo largo del cual el tiempo de transición de x_0 a x_1 es menor que a lo largo de los restantes.

4.3. LEMA. Siendo M_1 y M_2 dos semitrayectorias a la derecha, que parten del punto $x_0 = (x^1{}_0, x^2{}_0) \in G$, correspondientes a los valores k_1 y k_2 del parámetro k, $x^2 = f_1(x^1)$ y $x^2 = f_2(x^1)$ las soluciones de [6] cuyas gráficas son M_1 y M_2, $[x^1{}_0, x^1{}_1)$ un intervalo en el que están definidas f_1 y f_2 (como soluciones de [6]) y suponiendo que se cumple

$$-\frac{\pi}{2} < U(x_0) - k_1 < U(x_0) - k_2 < \frac{\pi}{2} \qquad [11]$$

existen un intervalo $I = [x^1{}_0, x^1{}_2) \subset [x^1{}_0, x^1{}_1)$ y una solución $x^2 = g(x^1)$ de [6], definida en I, tales que

$$\text{para todo } x^1 \in I \implies f_1(x^1) < g(x^1) < f_2(x^1) \qquad [12]$$

Demostración. Veamos, primeramente, que en un semientorno $(x^1{}_0, x^1{}_0 + e)$ se verifica que:

$$\text{para todo } x^1 \in (x^1{}_0, x^1{}_0 + e) \implies f_1(x^1) < f_2(x^1)$$

En efecto, si en cualquier semientorno $(x^1{}_0, x^1{}_0 + e)$ se verificase $f_1(x^1) \geqq f_2(x^1)$ para infinitos valores de x^1, se cumpliría

$$\frac{f_1(x^1) - f_1(x^1{}_0)}{x^1 - x^1{}_0} \geqq \frac{f_2(x^1) - f_2(x^1{}_0)}{x^1 - x^1{}_0}$$

lo que nos conduciría a la siguiente relación entre las derivadas:

$$(f_1)' + (x_0{}^1) \geqq (f_2)' + (x_0{}^1) \qquad [13]$$

Pero al ser f_1 y f_2 diferenciables en x_0 y soluciones de [6] se verificarán las relaciones

$$(f_1)' + (x_0{}^1) = (f_1)' - (x_0{}^1) = f'_1(x_0{}^1) = tg(U(x_0) - k_1) \qquad [14]$$

$$(f_2)' + (x_0{}^1) = (f_2)' - (x_0{}^1) = f'_2(x_0{}^1) = tg(U(x_0) - k_2) \qquad [15]$$

De [13], [14] y [15] se deduce

$$tg(U(x_0) - k_1) \geqq tg(U(x_0) - k_2)$$

lo que contradice la hipótesis [11].

Siendo k' un valor de k que verifique las desigualdades

$$-\frac{\pi}{2} < U(x_0) - k_1 < U(x_0) - k' < U(x_0) - k_2 < \frac{\pi}{2} \qquad [16]$$

y $x^2 = g(x^1)$ la solución de [6] obtenida con $k = k'$, la aplicación reiterada de la propiedad anterior a f_1 y g, a g y f_2, nos completa la demostración.

4.5. LEMA. Para cualesquiera cuatro puntos

$x_0 = (x^1{}_0, x^2{}_0)$, $x_1 = (x^1{}_1, x^2{}_1)$, $y_0 = (x^1{}_0, x^2{}_0 + L)$, $y_1 = (x^1{}_1, x^2{}_1 + L)$

que formen un paralelogramo $x_0x_1y_1y_0x_0$ contenido en G, se puede conseguir, asignando a k un número finito de valores apropiados en la ecuación

$$\frac{dx^2}{dx^1} = tg(\mathrm{U} - k) \qquad [17]$$

que la trayectoria poligonal correspondiente que parte de x_0 alcance por el interior del paralelogramo el lado x_1y_1. Análogamente, se puede conseguir, con valores apropiados de k, que la trayectoria poligonal vaya de cualquier otro vértice a cualquiera de los dos lados que no contienen al vértice.

Demostración. Vamos a ocuparnos de la primera afirmación. Si trazamos las rectas

$$x^1 = x^1{}_i = x^1{}_0 + ia, \text{ con } a = \frac{x_1{}^1 - x_0{}^1}{n} \text{ e } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$x^2 = (x^2{}_0 + jb) + \frac{x_1{}^2 - x_0{}^2}{x_1{}^1 - x_0{}^1}(x^1 - x_0{}^1)$$

con

$$b = \frac{x_1{}^2 - x_0{}^2}{m} \text{ y } j = 0, 1, 2, \ldots, m$$

paralelas a los lados del paralelogramo, éste queda dividido en $n \cdot m$ paralelogramos R_{ij} de vértices

$$(x^1{}_i, x^2{}_{ij}), (x^1{}_{i+1}, x^2{}_{i+1,j}), (x^1{}_i, x^2{}_{i,j+1}), (x^1{}_{i+1}, x^2{}_{i+1,j+1})$$

siendo

$$x^2{}_{ij} = x^2{}_0 + jb + \frac{x_1{}^2 - x_0{}^2}{x_1{}^1 - x_0{}^1}(x^1{}_i - x^1{}_0)$$

Si llamamos β_1 y β_2 a los dos ángulos definidos por las relaciones

$$tg\ \beta_1 = \frac{x_1{}^2 - x_0{}^2}{x_1{}^1 - x_0{}^1}$$

$$tg\ \beta_2 = \frac{x_1{}^1 + \mathrm{L} - x_0{}^2}{x_1{}^1 - x_0{}^1}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \beta_1 < \beta_2 < \frac{\pi}{2}$$

por el teorema de la continuidad uniforme se puede asegurar que tomando m y n suficientemente grandes, la condición

$$(x^1, x^2) \in \mathrm{R}_{ij}, (\overline{x^1}, \overline{x^2}) \in \mathrm{R}_{ij}$$

para cualquier R_{ij}, implicará:

$$|U(x^1, x^2) - U(\bar{x}^1, \bar{x}^2)| < \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

En estas condiciones, definiremos k de modo que valga en cada parelelogramo R_{ij}:

$$k = k_{ij} = U(x_i^1, x^2_{ij}) - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = U_{ij} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

con lo que la ecuación [17] toma en cada R_{ij} la forma

$$\frac{dx^2}{dx^1} = tg(U - k_{ij}) \qquad [18]$$

o bien:

$$\frac{dx^2}{dx^1} = tg\left(U(x^1, x^2) - U(x^1{}_i, x^2{}_{ij}) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)$$

para la que se cumplen las siguientes desigualdades

$$\beta_1 = -\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} < U - U_{ij} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} <$$

$$< \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \beta_2$$

La curva integral $x^2 = \alpha(x^1)$ de [17] (ecuación que en cada R_{ij} tiene la forma [18]), que parte de x_0 con pendiente

$$tg\left(\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right)$$

no sólo comienza por el interior del paralelogramo $x_0 x_1 y_1 y_0 x_0$, sino que continúa por el mismo, ya que de

$$\frac{d\,\alpha(x^1)}{dx^1} = tg(U(x^1, \alpha(x^1)) - k)$$

y, hasta donde esté definida, satisfará las condiciones

$$tg\beta_1 < \frac{d\,\alpha(x^1)}{dx^1} = tg(U(x^1, \alpha(x^1)) - k) < tg\beta_2$$

de donde

$$tg\beta_1 \cdot dx^1 < d\,\alpha(x^1) < tg\beta_2 \cdot dx^1$$

e integrando

$$tg\beta_1 \cdot (x^1 - x^1{}_0) < \alpha(x^1) - x^2{}_0 < tg\beta_2 \cdot (x^1 - x^1{}_0)$$

y por tanto

$$x^2{}_0 + tg\beta_1 \cdot (x^1 - x_0{}^1) < \alpha(x^1) < x_0{}^2 + tg\beta_2 \cdot (x^1 - x_0{}^1)$$

que permite probar que dicha curva está dentro de nuestro paralelogramo, ya que está contenida en el triángulo $x_0x_1y_1$.

Haciendo $x^1 = x^1{}_1$ en las últimas desigualdades, resulta

$$x_1{}^2 = x_0{}^2 + tg\beta_1 \cdot (x_1{}^1 - x_0{}^1) < \alpha(x_1{}^1) < x_0{}^2 + tg\beta_2 \cdot (x_1{}^1 - x_0{}^1) = x_1{}^2 + \mathrm{L}$$

Finalmente, las relaciones

$$x^2{}_1 < \alpha(x_1{}^1) < x_1{}^2 + \mathrm{L}$$

prueban la afirmación del lema.

Los razonamientos anteriores son válidos también para cualquier situación de los puntos x_0 y x_1 distinta de la presentada en las hipótesis.

4.6. Lema. En las hipótesis del lema 4.5, existe al menos una trayectoria poligonal contenida en el paralelogramo $x_0x_1y_1y_0x_0$ que une x_0 con x_1.

Demostración. Sean $x^2 = \alpha_1(x^1)$ y $x^2 = \alpha_2(x^1)$ las ecuaciones de las trayectorias poligonales que parten de x_0 y de x_1, respectivamente, y alcanzan los lados x_1y_1 y x_0y_0. La función $\alpha(x^1) = \alpha_1(x^1) - \alpha_2(x^1)$ es continua en $[x^1{}_0, x^1{}_1]$ y, en los extremos de dicho intervalo, toma los valores

$$\alpha(x_0{}^1) = \alpha_1(x_0{}^1) - \alpha_2(x_0{}^1) = x_0{}^2 - \alpha_2(x_0{}^1) < 0$$
$$\alpha(x_1{}^1) = \alpha_1(x_1{}^1) - \alpha_2(x_1{}^1) = \alpha_1(x_1{}^1) - x_1{}^2 > 0$$

existiendo por tanto un punto $s \in (x^1{}_0, x^1{}_1)$, al menos, en el que se verificará $\alpha(s) = 0$. Consecuentemente, la función

$$\alpha_3(x^1) = \begin{cases} \alpha_1(x^1), \text{ si } x^1 \in [x_0{}^1, s) \\ \alpha_2(x^1), \text{ si } x^1 \in [s, x_1{}^1] \end{cases}$$

es una trayectoria poligonal que une el punto x_0 con el punto x_1.

4.7. Teorema. Dados cualesquiera puntos x_0, $x_1 \in \mathrm{G}$, existe, al menos, un camino que une x_0 con x_1. Además, dicho camino está contenido en G.

Demostración. Por ser G simplemente conexo, podemos obtener los puntos $x_0 = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = x_1$ determinando una quebrada contenida en G y que une x_0 con x_1. La existencia de las trayectorias poligonales $x^2 = \alpha_i(x^1)$, con $i = 0, 1, \dots, n - 1$, uniendo cada dos puntos consecutivos y_i e y_{i+1}, es consecuencia del lema 4.6. Además, siendo $(\overline{x}^1{}_0, \overline{x}^2{}_0)$ las coordenadas de x_0, $(\overline{x}^1{}_1, \overline{x}^2{}_1)$ las de x_1 y $(x^1{}_i, x^2{}_i)$ las de y_i, la función $x^2 = \alpha(x^1)$, que en cada intervalo $[x^1{}_i, x^1{}_{i+1}]$ coincide con $\alpha_i(x^1)$, es una trayectoria poligonal que une x_0 con x_1 y está contenida en G.

La existencia de un camino uniendo x_0 con x_1 se deduce de la definición 4.2, lo que completa la demostración.

5. APENDICE

El estudio de las curvas de nivel cero de las funciones $v \cdot \cos(U - k)$ y $v \cdot \operatorname{sen}(U - k)$, armónicas en virtud de las hipótesis del apartado 1, son consecuencia inmediata de un teorema que publicamos en un trabajo anterior ([6], teor. 2.5). Indicaremos a continuación sus propiedades fundamentales.

Para cada número real k, $C(k)$ y $D(k)$ son los siguientes subconjuntos de Z:

$$C(k) = \left\{ p \in Z : (2p + 1) \frac{\pi}{2} - k \in [m, M] \right\}$$

$$D(k) = \{ p \in Z : (2p + 1)\, \pi - k \in [m, M[\}$$

siendo m y M el mínimo y el máximo de la función U en G, respectivamente.

Los conjuntos $C(k)$ y $D(k)$ son finitos y $\forall\ p_1 \in C(k)$ y $\forall\ p_2 \in D(k)$ existen las líneas:

$$c(k, p_1) = \left\{ P \in \overline{G} : U(P) = (2p_1 + 1) \frac{\pi}{2} - k \right\}$$

$$d(k, p_2) = \{ P \in \overline{G} : U(P) = (2p_2 + 1)\, \pi - k \}$$

En el próximo teorema se incluyen todas las propiedades de las líneas $c(k, p)$ y $d(k, p)$ que se utilizan en los apartados anteriores.

5.1. Teorema.

a) A lo largo de la línea $c(k, p)$ (respectivamente, $d(k, p)$) la función $\cos(U - k)$ (respectivamente, $\operatorname{sen}(U - k)$) es nula;

b) $\forall\ p_1 \in C(k)$ y $\forall\ p_2 \in D(k) \Rightarrow c(k, p_1) \cdot d(k, p_2) = \emptyset$;

c) $\forall\ p_1, p_2 \in C(k),\ p_1 \neq p_2 \Rightarrow c(k, p_1) \cdot c(k, p_2) = \emptyset$;

d) $\forall\ p_1, p_2 \in D(k),\ p_1 \neq p_2 \Rightarrow d(k, p_1) \cdot d(k, p_2) = \emptyset$;

e) $\forall\ p_1 \in C(k)$ y $\forall\ p_2 \in D(k)$, son no vacíos los conjuntos $c(k, p_1) \cdot fr(G)$ y $d(k, p_2) \cdot fr(G)$.

La región G queda descompuesta por las líneas de nivel correspondientes a los distintos valores de $p \in C(k)$ en bandas limitadas por dichas líneas. La frontera de estas bandas se compondrá de arcos de la frontera de G y de una o más líneas de la familia $c(k, p)$. Además, cuando figuren dos de estas líneas en la frontera de una banda con distinto valor del parámetro p, éstos deberán ser dos enteros consecutivos. Utilizaremos los símbolos $C_i(k)$ y $D_j(k)$ para designar las bandas obtenidas, para cada valor de k, respecto de las familias de curvas $c(k, p)$ y $d(k, p)$. (Naturalmente, los índices i y j toman valores en conjuntos finitos.)

BIBLIOGRAFIA

(1) BOLTYANSKII, V. G.: «Time-optimal Synthesis for Nonlinear Control Systems of Second Order», en *Mathematical Theory of Control,* Balakrishnan y Neustadt, eds. Academic Press, New York, 1967.

(2) CODDINGTON and LEVINSON: *Theory of Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill, New York, 1955.

(3) LA SALLE and LEFSCHETZ (editores): *Nonlinear Differential Equa. tions and Nonlinear Mechanics.* Academic Press, New York, 1963-

(4) SANSONE and CONTI: *Nonlinear Differential Equations.* Pergamon Press, Oxford, 1964.

(5) MARKUSHEVICH, A. I.: *Theory of Functions of a Complex Variable.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.

(6) MUÑOZ, F.: *Sobre ciertas propiedades de las Funciones Armónicas* (en prensa).