METODOS DE CALCULO DEL TERMINO PRINCIPAL DE INTEGRALES PARAMETRICAS DIVERGENTES

por

J. A. Bujalance Garcia, M. I. Garcia Olmos
y F. Gonzalez Gascon

RESUMEN

Se calcula el término principal de varias clases de integrales paramétricas divergentes cuando el parámetro positivo que figura en las mismas tiende a cero (parámetro perturbativo).

SUMMARY

The principal term of several divergent parametric integrals is found when the positive parameter appearing in them approaches the zero value (perturbation parameter).

INTRODUCCION

El problema que nos interesa consiste en averiguar (sin realizar la integración completa, por imposibilidad práctica en la mayor parte de los casos) el tipo de divergencia en c que presentan ciertas integrales de la forma,

$$\mathrm{I}(c) = \int_0^\infty f(x, c)\, dx \qquad [1]$$

cuando el parámetro positivo c tiende a cero. Para ello se utilizarán dos procedimientos. El uso de uno u otro dependerá, como veremos, de la estructura de la función $f(x, c)$.

Las integrales a las que se aplican nuestros procedimientos han aparecido en problemas de teoría de transporte tratados a partir de la ecuación íntegrodiferencial de Boltzmann (1). Para muchas necesidades físicas es suficiente conocer tan sólo el «término principal» de la divergencia de las integrales (esto es, el sumando de $I(c)$ en que aparece la divergencia en c de orden más alto). Es por ello que tan sólo nos ocupamos del comportamiento de este término «principal».

En la mayoría de los casos presentados, la validez de los métodos utilizados ha sido *comprobada* por comparación con algunos resultados exactos que se encuentran en conocidas tablas de integrales, citadas en las referencias.

Presentamos un ejemplo de integral paramétrica divergente, de comportamiento singular conocido y cuya divergencia principal *no* ha sido posible obtenerla por nuestros procedimientos. Con este ejemplo se pretende atraer la atención del lector, orientándolo hacia el cálculo de la parte principal de esta última integral a base de una ampliación de los métodos aquí presentados.

Primer método: Divergencia de I(0) en puntos aislados

En todo lo que sigue supondremos $c \geqslant 0$. Se supondrá, igualmente, que $I(c)$ es convergente cuando $c > 0$. La aplicabilidad de este primer método vendrá restringida a los casos en que $f(x, 0)$ haga divergente a $I(0)$ a causa del comportamiento singular de $f(x, 0)$ en un número finito de puntos de la recta real a distancia finita del origen $x = 0$. Puesto que la generalización del método es obvia, se ha preferido, para mayor claridad expositiva, utilizar dos ejemplos significativos. Dejamos al lector la formalización del método, así como la aplicación del mismo a los ejemplos que se van citando en el trabajo.

Comencemos, por tanto, estudiando el caso en que

$$f_1(x, c) = \exp(-x) \cdot (x + c)^{-1} \qquad [2]$$

Es obvio que para $c > 0$ la integral $I_1(c)$, correspondiente a la función f_1 de [2], es convergente.

Por otra parte, se tiene

$$f_1(x, 0) = \exp(-x) \cdot x^{-1}$$

función que presenta una singularidad para $x = 0$. Esta singularidad implica la divergencia de $I_1(0)$.

Para aislar las singularidades (sólo una en este caso), en el interior de intervalos finitos de integración, realicemos la descomposición

$$I_1(c) = \int_0^1 f_1(x, c)\, dx + \int_1^\infty f_1(x, c)\, dx \qquad [3]$$

De las dos integrales que aparecen en [3], sólo la extendida al intervalo finito [0, 1] es divergente cuando $c = 0$. La integral extendida al intervalo $[1, \infty]$ es analítica en c en el entorno de $c = 0$. Llamando $A_1(c)$

al valor de esta última integral y sin más que desarrollar $\exp(-x)$ en serie de potencias de x alrededor de $x = 0$ se tendrá:

$$I_1(c) = A_1(c) + \int_0^1 (x + c)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \cdot dx \qquad [4]$$

y puesto que $\exp(-x)$ admite un desarrollo uniformemente convergente en [0, 1] podrá también escribirse:

$$I_1(c) = A_1(c) + \int_0^1 (x + c)^{-1} dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 (x + c)^{-1} x^n dx$$

esto es,

$$I_1(c) = A_1(c) + ln(1 + c) - ln\, c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 (x +$$

$$+ c - c)^n (x + c)^{-1} dx = A_1(c) + ln(1 + c) - ln\, c +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 dx\, [(x + c)^{n-1} - \ldots - (-1)^n c^n (x + c)^{-1}] \qquad [5]$$

Llamando $A_1^*(c)$ a la parte analítica en c de la expresión [5], se tiene

$$I_1(c) = A_1^*(c) - ln\, c + \sum_1^{\infty} c^n/n! \int_0^1 dx\, (x + c)^{-1}$$

$$= A_1^*(c) - [ln\, c \cdot \exp(c)]$$

luego la parte principal de la divergencia de $I_1(c)$ vale $(- ln\, c)$. Este resultado vendrá denotado, en lo que sigue, en la forma:

$$I_1(c) \sim - ln\, c \qquad [6]$$

El resultado [6] concuerda con el de la referencia 2.

Un método análogo al empleado para $I_1(c)$ nos permite calcular el término principal de la divergencia en c que presentan las integrales

$$I_1(c;\, r_1, r_2, r_3) = \int_0^{\infty} \exp(- x^{r_1})\, (x +$$

$$+ c)^{-r_2} x^{-r_3} dx,\; r_1 > 0,\; r_2 > 0,\; 0 \leqslant r_3 < 1 \qquad [7]$$

cuando $c \searrow 0$. Puesto que para $c > 0$ las integrales de [7] son convergentes y para $c = 0$, $I_1(0; r_1, t_2, r_3)$ es divergente si $r_2 + r_3 \geqslant 1$ debido al comportamiento del integrando de [7] en $x = 0$, el método anterior será también aplicable en este caso más general. Sin más que utilizar el desarrollo uniformemente convergente de $\exp(-x^{r_1})$ y separar la parte analítica en c se podrá escribir:

$$I_1(c; r_1, r_2, r_3) = \overset{*}{A}_1(c; r_1, r_2, r_3) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{s} (-1)^n/n! \int_0^1 (x^{r_1})^n\, x^{-r_3}(x + c)^{-r_2}\, dx \qquad [8]$$

en donde n recorre todos los valores enteros positivos, tales que $(nr_1 - - r_2 - r_3) \leqslant -1$.

Puesto que no estamos interesados en el cálculo de la parte divergente de $I_1(c; r_1, r_2, r_3)$, sino tan sólo en la parte principal de la divergencia $P_1(c; r_1, r_2, r_3)$ basta considerar el primer término divergente de [8], esto es:

$$\int_0^1 x^{-r_3} \cdot (x + c)^{-r_2} \cdot dx \qquad [9]$$

El comportamiento en c de [9] es bien sencillo. En efecto, cuando $r_2 + r_3 > 1$, sin más que hacer en [9] $x = ct$ se tiene:

$$\int_0^1 x^{-r_3} \cdot (x + c)^{-r_2} \cdot dx = \int_0^{1/c} t^{-r_3} (t + 1)^{-r_2} \cdot c^{1-r_2-r_3} \cdot dt =$$

$$= A(c) \cdot c^{1-r_2-r_3}$$

siendo $A(c)$ la función analítica en c (en el entorno de $c = 0$) dada por:

$$A(c) = \int_0^{1/c} t^{-r_3} (t + 1)^{-r_2}\, dt$$

Así, pues, en este caso se tiene:

$$I_1(c; r_1, r_2, r_3) \sim A(0) \cdot c^{1-r_2-r_3} \qquad [10]$$

Cuando $r_2 + r_3 = 1$ se tendrá:

$$I_1(c; r_1, r_2, 1 - r_2) \sim \int_0^1 x^{-(1-r_2)} \cdot (x + c)^{-r_2} \cdot dx$$

y con $x = ct$

$$I_1(c; r_1, r_2, 1 - r_2) \sim \int_0^{1/c} t^{-(1-r_2)} (t + 1)^{-r_2} \cdot dt \qquad [11]$$

Puesto que [11] es divergente (cuando $c = 0$) debido al comportamiento del integrando en $t = +\infty$, el comportamiento en c de la integral

$$\int_0^{1/c} t^{-(1-r_2)} (t + 1)^{-r_2} \cdot dt$$

es idéntico que el de la integral:

$$\int^{1/c} t^{-(1-r_2)} \cdot t^{-r_2}\, dt = \ln t \Big|^{1/c} = -\ln c$$

Luego

$$I_1(c; r_1, r_2, 1 - r_2) \sim -\ln c \qquad [12]$$

En algunos casos particulares, el resultado proporcionado por [10] y [12] puede comprobarse con la solución exacta. Así, cuando sustituimos $r_2 = 1$ y $r_3 = 1/2$ en [9] se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 dx\, x^{-1/2} (x + c)^{-1} = 2 \int_0^1 dt \cdot (t^2 + c)^{-1} = \\ &= 2\, c^{-1/2} \operatorname{arc} tg\, c^{-1/2} = \pi\, c^{-1/2} + A_3(c) \end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

siendo $A_3(c)$ analítica en c (entorno de $c = 0$), $x = t^2$ y habiendo utilizado el desarrollo asintótico de arc $tg\,(c^{-1/2})$ en $c \searrow 0$ (3).

El resultado contenido en [13] concuerda con el dado en [10] para $r_2 = 1$, $r_3 = 1/2$. El coeficiente π de $c^{-1/2}$ en [13] puede comprobarse, igualmente, con el resultado exacto de la integral

$$\int_0^1 \exp(-x)\, x^{-1/2} (x + c)$$

que puede encontrarse en la referencia 4.

Igualmente ocurre si sustituimos en [9] $r_3 = 1/2$ y $r_2 = 1/2$. En tal caso se tiene, sin más que poner $x = t^2$:

$$\int_0^1 x^{-1/2} (x + c)^{-1/2}\, dx = 2 \int_0^1 dt\, (c + t^2)^{-1/2} =$$

$$= 2 \ln (t + (c + t^2)^{+1/2}) \Big|_0^1 = 2 \ln (1 + (c + 1)^{1/2}) - 2 \ln c^{1/2}$$

o sea, $I_1(c; r_1, 1/2, 1/2) \sim -\ln c$, de acuerdo con [12].

A la vista de cuanto se ha explicado anteriormente, no creemos que el lector tenga la menor dificultad en encontrar la divergencia principal de otras integrales del mismo tipo a las que el método pueda aplicarse. Por poner algunos ejemplos, las integrales que siguen son inmediatamente tratables:

$$\mathrm{I}_2(c) = \int_0^\infty \operatorname{sen} x \cdot x^{-1} (x^2 + c^2)^{-1}\, dx \sim c^{-1} \text{ (Ref. 5)},$$

$$\mathrm{I}_2(c; r_1, r_2, r_3) = \int_0^\infty (\operatorname{sen} x)^{r_1} x^{-r_2} (x^2 + c^2)^{-r_3}\, dx \sim c^{r_1 - r_2 + 1 - 2r_3},$$

$$r_1, r_2 > 0,\ r_3 \geqslant 1,\ r_1 - r_2 > -1$$

$$\mathrm{I}_3(c) = \int_0^\infty (x^2 - 2x \cos c + 1)^{-1}\, dx \sim c^{-1} \text{ (Ref. 6)}.$$

SEGUNDO MÉTODO: SEPARABILIDAD CONVERGENTE DE $f(x, c)$.

Continuaremos suponiendo $c \geqslant 0$ e $\mathrm{I}(c)$ convergente para $c > 0$. La aplicabilidad de este segundo método es mucho más restringida, aunque, como se verá, muchas integrales paramétricas tabuladas permiten ser tratadas por él. Por ser conceptual y analíticamente mucho más rápido que el anterior, resulta de gran utilidad combinado con él.

El método será de utilidad cuando $f(x, c)$ sea tal que al sustituir en ella la variable x por $t^{r_1} \cdot c^{r_2}$, $r_1 > 0$, se tenga:

$$f(t^{r_1} \cdot c^{r_2}, c) = \sum_n f_n(t)\, g_n(c) \qquad [14]$$

estando el sumatorio extendido a un número finito de términos y debiendo ser convergentes las integrales

$$\int_0^\infty f_n(t) \cdot t^{r_1 - 1} \cdot dt \qquad [15]$$

Este tipo de separabilidad de $f(x, c)$, como se habrá notado, ya ha sido en parte utilizada en el primer método. Sin embargo, se ha preferido distinguir conceptualmente el primer y el segundo método por claridad expositiva. En algunos casos, una misma $f(x, c)$ es tratable simultáneamente por el primer y el segundo método. En tales casos, la rapidez de este segundo método lo hacen preferible al primero.

Encontrados, pues r_1 y r_2, capaces de satisfacer las condiciones [14] y [15], el cálculo de la parte principal de $\mathrm{I}(c)$ se reduce al de calcular la divergencia de orden máximo en c (al tender c a 0) entre las funciones $g_n(c)$.

La operatividad del método quedará bien clara con el ejemplo que sigue. Sea la integral

$$\mathrm{I}_3(c) = \int_0^\infty \exp(-cx) \cdot \ln x \cdot dx$$

cuya parte principal se sabe que es $c \cdot (-\ln c)$ (7).

Puesto que la integral $I_3(c)$ cumple las condiciones [14] y [15] con $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$ se tiene

$$I_3(c) = \int_0^\infty \exp(-t)\, ln\,(t \cdot c^{-1}) \cdot dt \cdot c^{-1} = -\frac{ln\, c}{c}\int_0^\infty \exp(-t)\, dt +$$

$$+ c^{-1}\int_0^\infty \exp(-t) \cdot ln\, t \cdot dt$$

y por tanto,

$$I_3(c) \sim -c^{-1} \cdot ln\, c$$

como queríamos demostrar.

El lector comprobará la aplicabilidad del método para las siguientes integrales:

$$I_4(c) = \int_0^\infty \exp(-c \cdot x^{r_1})\, x^{r_2}\, dx \qquad r_1 > 0,\ r_2 > -1$$

$$I_5(c) = \int_0^\infty \cos(cx^r)\, dx\ ,\ r > 0 \text{ (Ref. 8)}$$

$$I_6(c) = \int_0^\infty A(x)\, H(x, c)\, dx, \text{ con } A(x) \text{ acotada en } [0, \infty)$$

y $H(x, c)$ satisfaciendo a las condiciones [14] y [15].

$$I_7(c) = \int_0^\infty [\exp(cx)-1]^{-1}\, x^r\, dx,\ r > 0 \text{ (Ver Ref. 9)}$$

La última de estas integrales, $I_7(c)$, sin embargo, puede también tratarse por el primer método.

Algunos ejemplos de integrales paramétricas a resolver.

Proponemos a continuación algunos ejemplos de integrales a las que los métodos anteriores no son aplicables. Sería de desear el desarrollo de nuevos métodos capaces de proporcionar el término principal de estas integrales paramétricas cuando $c \searrow 0$.

Sea la integral

$$I_8(c) = \int_0^\infty [(1 + c^2 x^2)^{-1} - \exp(-Ax)]\, x^{-1}\, dx \cdot A > 0$$

Es obvia la convergencia de la misma para $c > 0$. Sin embargo, para $c = 0$ la integral resultante diverge por el comportamiento del integrando en $x = \infty$. Es por ello que $I_8(c)$ no es tratable por el primer procedimiento. La no separabilidad convergente de $f_8(c)$ es obvia, por lo que tampoco será aplicable a la misma el segundo método. Las dos integrales en que se descompone $I_8(c)$

$$\int_0^\infty (1 + c^2 x^2)^{-1} x^{-1} \, dx$$

$$\int_0^\infty \exp(-Ax) \cdot x^{-1} \, dx$$

son separables, *pero* ambas son *divergentes*, incluso para $c > 0$. Por otra parte, el cambio de variables, $x = 1/t$, convertiría la singularidad del integrando $f_8(x, c)$ en $x = \infty$ al punto $t = 0$. Sin embargo, tal proceder nos conduciría a la función $\exp(-At^{-1})$ con una singularidad esencial en $t = 0$. Por ello tampoco parece útil la aplicación del primer método a la nueva función $f_8(t, c)$ así obtenida.

Consideraciones similares pueden hacerse respecto de las integrales

$$I_9(c) = \int_0^\infty [(1 + cx)^{-1} - \exp(-Ax)] \, x^{-1} \, dx \quad (10)$$

$$I_{10}(c) = \int_0^\infty \exp(-cx^2) \cdot \cos x \cdot dx \quad (11)$$

El resultado final de la aplicación de nuevos métodos, capaces de tratar a $I_8(c)$ e $I_9(c)$, debe ser

$$I_8(c) \sim I_9(c) \sim ln(A/c) \quad (10)$$

El desarrollo de nuevos métodos, capaces de tratar las divergencias principales de I_8, I_9 e I_{10} es el problema abierto que proponemos.

REFERENCIAS

1. G. Cavalleri, E. Gatti, F. González-Gascón: «Orders of Approx. in transport Theory for electrons and holes in a scattering medium», *J. Mathematical Physics*. Enviado para publicación.

2. M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Math. Functions*, Dover Pub., N. Y., 1968, pág. 230, 5.1.28 y pág. 229, 5.1.11 ($a = 1$, $b = c$).

3. S. M. Selby: *Standard Math. Tables*. 17th. Edition. Editado por The Chemical Rubber Co., Cleveland (Ohio), 1969, pág. 466.

4. Ver ref. 2, pág. 302, 7.4.9; pág. 297, 7.1.2. y 7.1.5.

5. W. GROBNER, N. HOFREITER: *Integraltafel, Zweiten Teil: Bestimmte Integrale,* 4.ª edición mejorada, Springer-Verlag, Wien, 1966. Epígrafe 333,66d.

6. Ver ref. 5, epíg. 131,11c.

7. Ver ref. 5, epíg. 312,5b.

8. Ver ref. 5, epíg. 334,3a, 3b.

9. Ver ref. 5, epíg. 313,8a.

10. Ver ref. 5, epíg. 313, 12c, 12d.

11. Ver ref. 2, pág. 302, 7.4.6.