METODOS GRAFICOS PARA EL ESTUDIO DE CONJUNTOS INFINITOS

por

R. AGUADO-MUÑOZ PRADA (*)

1. JUSTIFICACIÓN.

Es un hecho que el estudio de los *conjuntos infinitos* está ausente de los tres niveles educativos. Es difícil saber las razones de tal ausencia. El objeto de este trabajo es mostrar que los métodos gráficos ayudan a construir un camino para el tratamiento elemental de los conjuntos infinitos. Con ello intentamos deshacer uno de los prejuicios que se oponen a la aparición en los programas, a saber: la dificultad que encierra la enseñanza de tales conceptos.

Hemos desarrollado el tema de manera lineal, sin destacar qué cuestiones concretas se podrían estudiar en la E. G. B., cuáles en el Bachillerato y cuáles en la Enseñanza Superior. Pero advertimos desde ahora que la mayor parte de las ideas se podrían desarrollar en la E. G. B., caso de que se estimara conveniente. Y esto es así, porque el requisito fundamental es el conocimiento del concepto de aplicación; y es bien sabido que esta noción se estudia en la E. G. B.

2. INTRODUCCIÓN AL TEMA.

Vamos a estudiar el problema de *el número de elementos* que tienen los conjuntos. De entrada se observa que hay dos tipos fundamentales, a saber: *conjuntos finitos* y *conjuntos infinitos.*

Conjuntos finitos son, por ejemplo, el conjunto de pelos de una cabeza y el conjunto de pelos de todas las cabezas del mundo.

Son conjuntos infinitos: el conjunto de los números naturales, el conjunto de puntos de una recta, el conjunto de puntos de un segmento...

(*) El autor, catedrático del Instituto «Cardenal Herrera Oria», presentó este trabajo en el «Seminario Permanente de Matemáticas» en el Bachillerato del ICE, de la Universidad Autónoma de Madrid.

Un conjunto finito está caracterizado intuitivamente por el hecho de que si extraemos un elemento del conjunto y luego otro distinto, y luego otro distinto de los anteriores, etc., llega un momento en que agotamos los elementos del conjunto. Si el conjunto es infinito, el proceso anterior no agota los elementos del conjunto.

En lo que sigue trataremos de comparar conjuntos, dando sentido a frases como:

«Hay el mismo número de puntos en una recta que en un segmento.»

«Hay más números reales que naturales.»

3. Conjuntos equipotentes.

Para comprobar que dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos, podemos hacer dos cosas: Una, contar los elementos de cada conjunto y ver que tienen el mismo número. Otra, establecer una biyección de un conjunto en el otro. De esta segunda manera es posible que ignoremos el número exacto de elementos, pero tiene la ventaja de poderse aplicar también a conjuntos infinitos.

Definición 1.

> Decimos que los conjuntos A y B son equipotentes, o que tienen el mismo cardinal, o que tienen el mismo número de elementos, cuando existe una biyección $f : A \to B$.

Si A y B son equipotentes, escribiremos $A \# B$ (A equipotente a B), y también $\# A = \# B$ (cardinal de A = cardinal de B).

Se cumple:

1.º $X \# X$,

2.º Si $X \# Y$, entonces $Y \# X$,

3.º Si $X \# Y$ e $Y \# Z$, entonces $X \# Z$,

para cualesquiera conjuntos X, Y, Z.

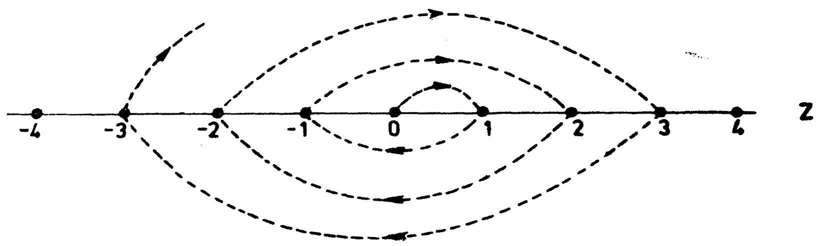
Ejemplos y ejercicios.

1. Siendo $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $I = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, se verifica

$$\# N = \# P = \# I$$

¡N tiene el mismo cardinal que una de sus partes propias!

2. $\# Z = \# N$



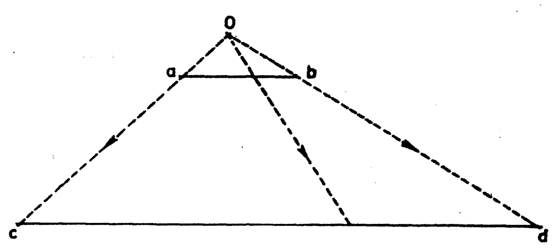
Este es un procedimiento para numerar los enteros «sin dejarse ninguno».

La biyección $f : Z \to N$ se puede definir así:

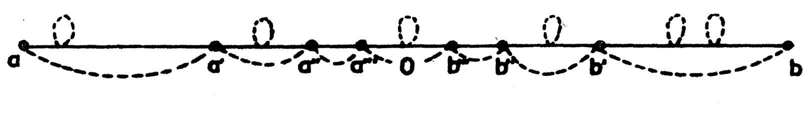
$$f : x \to 2|x| - \frac{|2x - 1| + 2x - 1}{2|2x - 1|}$$

3. Hay el mismo número de puntos en un segmento «chico» que en uno «grande»:

$\# [a, b] = \# [c, d]$

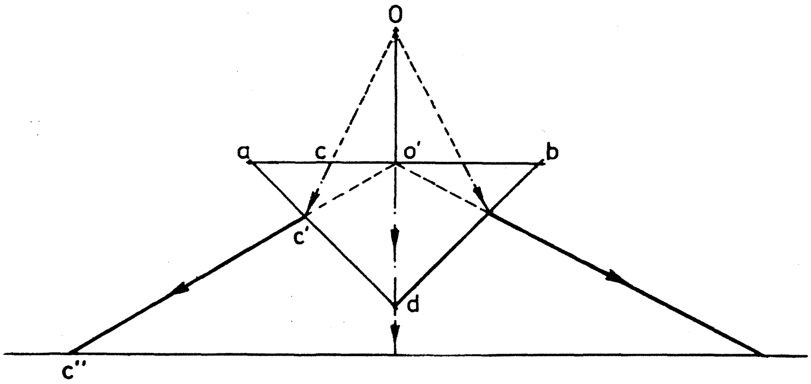


4. Hay el mismo número de puntos en un segmento cerrado que en uno abierto:



Este gráfico establece una biyección $f : [a, b] \to [a, b]$.

5. Hay el mismo número de puntos en un segmento abierto que en una recta:



4. Conjuntos numerales.

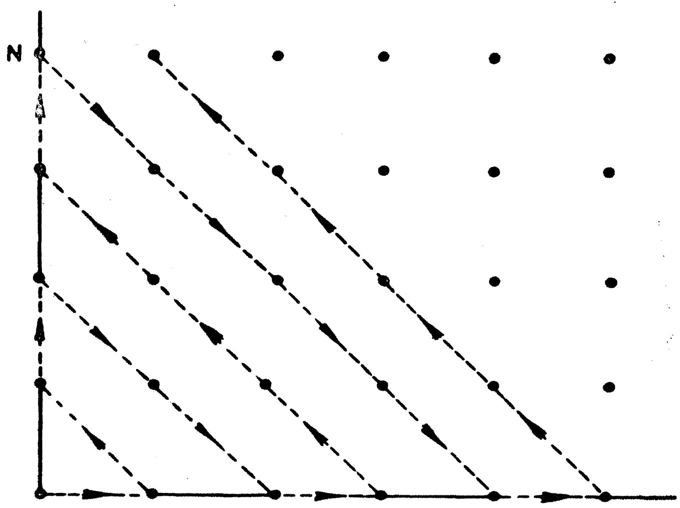
Definición 2.

El conjunto A es numerable cuando A es equipotente a N.

Los conjuntos N, P, I, Z son numerables.

Ejemplos y ejercicios.

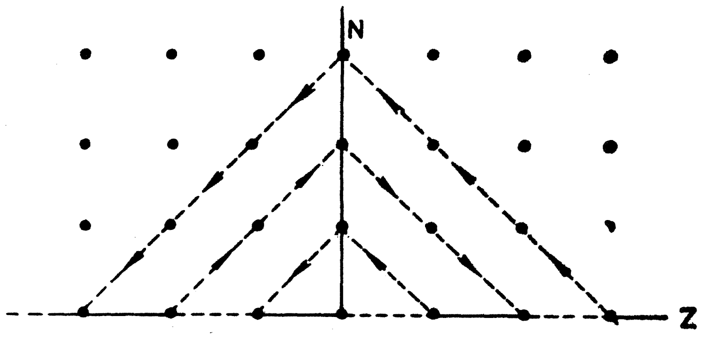
6. El producto cartesiano N × N es numerable:



Del gráfico se deduce la biyección:

$$f : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N} : (a, b) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a, \text{ si } a + b \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, \text{ si } a + b \text{ es impar} \end{cases}$$

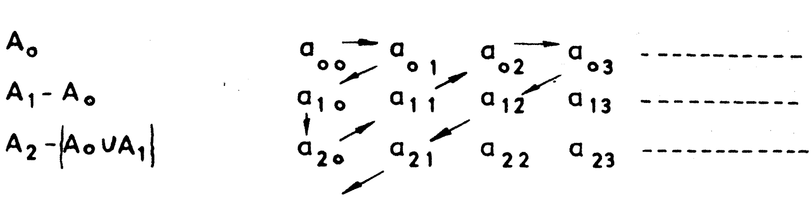
7. Z $\times$ N es numerable:



8. El producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable.
9. La unión finita de conjuntos numerables es numerable.
10. La unión numerable de conjuntos finitos es numerable.
11. La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Sea $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ un conjunto numerable de conjuntos numerables.

Para que no haya elementos repetidos, podemos considerar los conjuntos A_0, $A_1 - A_0$, $A_2 - (A_0 \cup A_1)$, que serán finitos o numerables, y disponer sus elementos por filas:

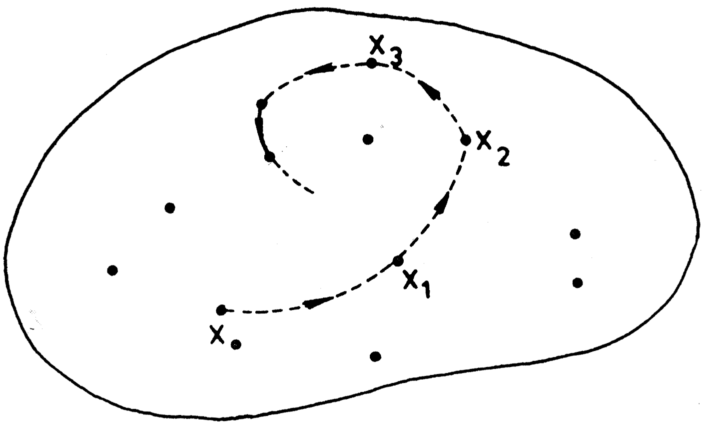


12. Q es numerable.
13. El conjunto de polinomios Q(X) es numerable.
14. El conjunto de números algebraicos es numerable.

5. Conjuntos infinitos.

Definición 3 (de PAPY).

> Llamamos ***retahila*** de origen x_0, definida en el conjunto A, a toda relación que satisface las condiciones siguientes:
>
> De x_0 parte una sola flecha que acaba en $x_1 \neq x_0 \in$ A,
> De x_1 parte una sola flecha que acaba en $x_2 \notin \{x_0, x_1\} \in$ A,
> De x_2 parte . . .



Retahila definida en A.

Definición 4.

> Un conjunto es *infinito* cuando en él se puede definir una retahila.

Proposición 1. El conjunto N de los números naturales es infinito (en él se puede definir la retahila $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots$).

Proposición 2. Todo conjunto infinito contiene una parte numerable. (El conjunto de todos los orígenes de las flechas de una retahila definida en el conjunto.)

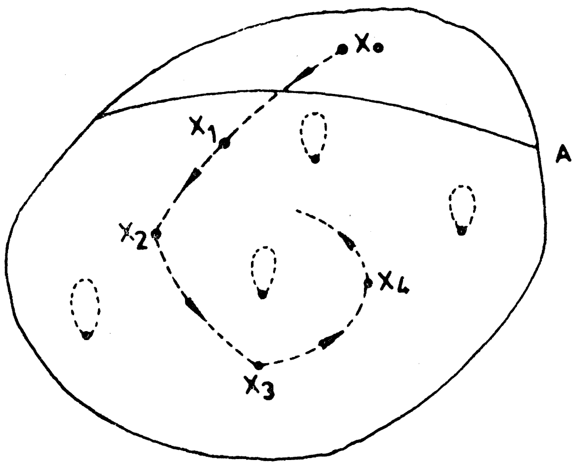
Consecuencia: Podemos decir que los conjuntos numerables son los «más pequeños» de los conjuntos infinitos.

Definición 5

> Un conjunto es *finito* cuando *no es infinito*.

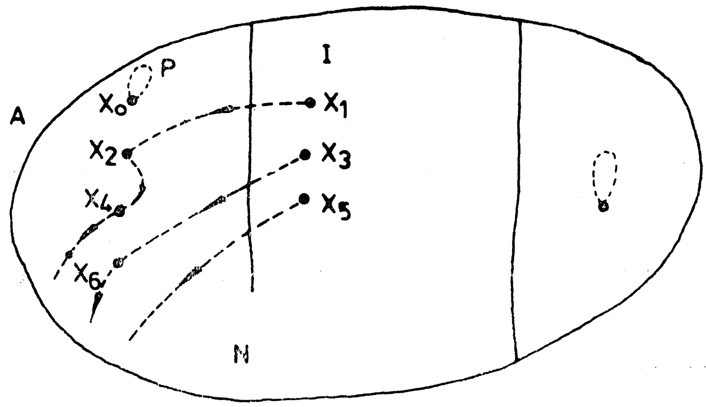
Proposición 3. Todo conjunto infinito es equipotente a una de sus partes propias.

Demostración (de PAPY): Sea A un conjunto infinito. Existe una retahila definida en él:



$f : A \to A - \{x_0\}$ es una biyección de A en la parte propia $A - \{x_0\}$

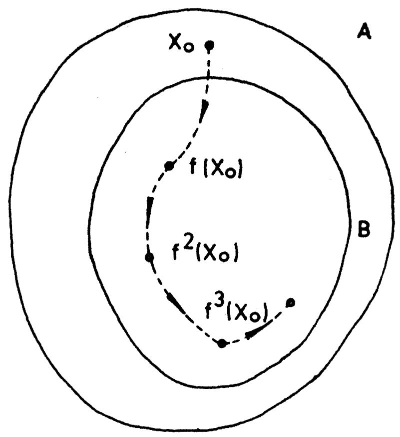
Demostración (de KOLMOGOROV): Si A es infinito, contiene una parte numerable N, entonces:



$f : A \to A - I$ es una biyección.

Proposición 4. Todo conjunto equipotente a una de sus partes propias es infinito.

Demostración (de PAPY): Sea B una parte propia de A y f una biyección de A en B.



Existe un $x_0 \in A - B$. Como $f(x_0) \in B$, entonces $f(x_0) \neq x_0$, lo que implica que $f^2(x_0) \neq f(x_0)$. Lo cual, unido a que $f^2(x_0) \in B$, implica $f^2(x_0) \notin \{x_0, f(x_0)\}$. Análogamente, $f^3(x_0) \notin \{x_0, f(x_0), f^2(x_0)\}$, etc. Entonces: $x_0 \to f(x_0) \to f^2(x_0) \to f^3(x_0) \to \ldots$ es una retahila definida en A. Lo que implica que A es infinito.

6. Teorema de Dedekind.

Teorema 1 (DEDEKIND).

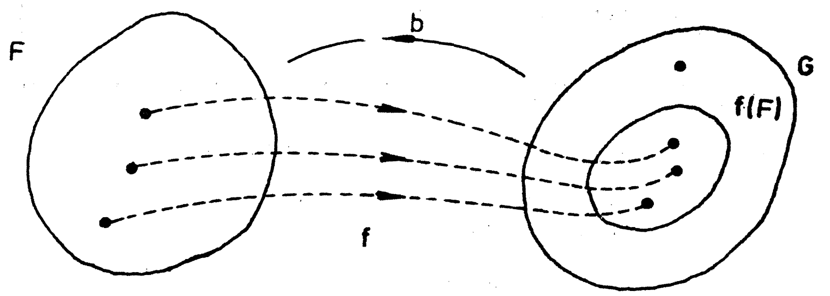
Un conjunto es infinito si, y sólo si, es equipotente a una de sus partes propias.

Demostración: El teorema es consecuencia inmediata de las proposiciones 3 y 4.

Consecuencia del Teorema 1:

Si F y G son dos conjuntos finitos con el mismo número de elementos y f es una inyección de F en G, entonces f es una biyección de F en G.

Demostración: Si la aplicación f no fuera suprayectiva

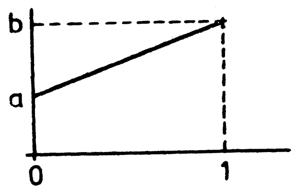


entonces la aplicación compuesta de las dos biyecciones:

$G \xrightarrow{b} F \xrightarrow{f} f(F)$ sería una biyección de G en una parte propia de G. Y G sería un conjunto infinito.

Proposición 5. El conjunto R de los números reales es equipotente segmento abierto $]0, 1[$.

Demostración. La aplicación $f :]0, 1[\to]a, b[: x \to (b - a)\, x + a$ es ·iva $(b \neq a)$.



todos los segmentos abiertos son equipotentes al
· tanto, todos los segmentos abiertos son equipo-

$$g : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to R : x \to \operatorname{tg} x$$

es biyectiva. Lo que prueba que R es equipotente

$$a\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

y, por consiguiente, R es equipotente $a]0, 1[$.

Teorema 2

El conjunto R de los números reales no es numerable.

Demostración (de CANTOR): Bastará probar que el segmento]0, 1[no es numerable.

Si el conjunto]0, 1[fuera numerable, existiría una lista:

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = 0'\, a_{00}\, a_{01}\, a_{02} \ldots\ldots\ldots a_{0n} \ldots \\ \alpha_1 = 0'\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = 0'\, a_{n0}\, a_{n1}\, a_{n2} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

donde aparecerían todos los números de]0, 1[en su forma decimal. Pero el número

$$b = 0'\, b_0\, b_1\, b_2 \ldots$$

en el que

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1, \text{ si } a_{00} \neq 1 \\ b_2 = 2, \text{ si } a_{00} = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = 1, \text{ si } a_{11} \neq 1 \\ b_1 = 2, \text{ si } a_{11} = 1 \end{array} \right. , \text{ etc.}$$

es un número de]0, 1[que no puede estar en la lista. En efecto, b no puede ser α_0 porque difieren en la primera cifra decimal, tampoco puede ser α_1 porque difieren en la segunda cifra decimal, etc.

Ejercicios

15. El conjunto de los números irracionales es no numerable.
16. El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

8. Emparedados.

Proposición 6 (emparedados)

Si un conjunto es equipotente a una de sus partes propias, es equipotente a todo conjunto intermedio.

Esto es:

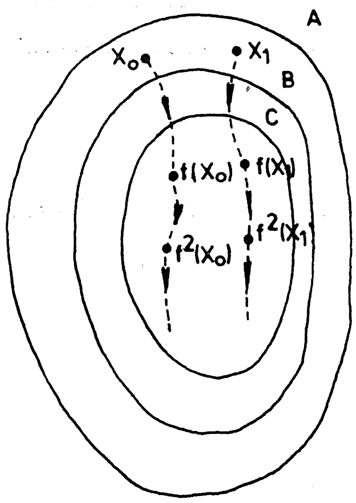
Si A $\supset$ B $\supset$ C y $\#$ A $=$ $\#$ C. Entonces $\#$ A $=$ $\#$ B

Demostración (de PAPY): Si A $=$ B la proposición es evidente.

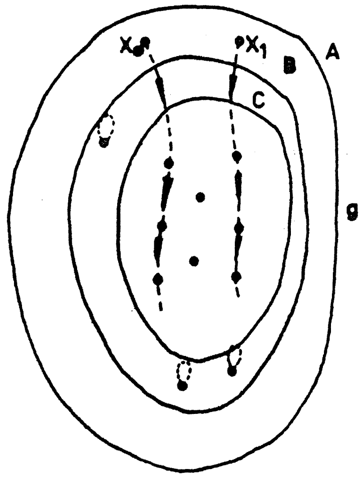
Supongamos, pues, que $A \neq B$ $(A - B \neq \emptyset)$, y que la aplicación $f : a \to C$ es biyectiva.

De modo análogo a lo visto en la proposición 4, se comprueba que todo punto x de $A - B$ es origen de una retahila:

$$x \to f(x) \to f^2(x) \to$$



Ninguna de estas retahilas se pueden cruzar



La aplicación $g : A \to B$ es biyectiva

Ejercicio.

17. $]0, 1[\;\# \; R$.

9. Comparación de conjuntos.

— ¿Qué conjunto «tiene más» elementos, N o R?

— R, porque existe una inyección de N en R, pero no existe ninguna inyección de R en N. Esta última afirmación no se podrá probar hasta más adelante.

Definición 6.

$\# A \leqslant \# B$ cuando existe una inyección $f : A \to B$

La relación $\leqslant$ es de orden, en el sentido de que se cumplen las propiedades reflexiva y transitiva. La antisimétrica constituye el

Teorema 3 (de CANTOR-BERSTEIN).

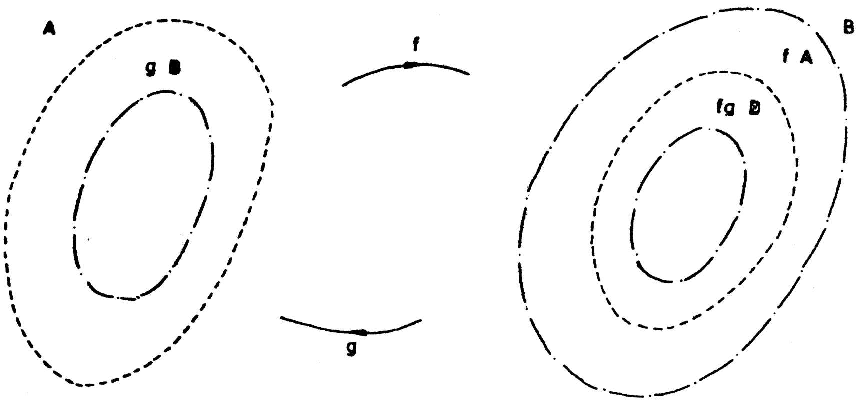
Si # A $\leqslant$ # B y # B $\leqslant$ # A. Entonces, # A = # B

O lo que es lo mismo:

Si existen las inyecciones f : A $\rightarrow$ B y g : B $\rightarrow$ A. Entonces existe una biyección de A en B.

Demostración (PAPY)

Cuando dos conjuntos sean equipotentes, los dibujaremos del mismo color.



teniendo en cuenta que B $\supset$ fA $\supset$ fgB y que # B = # fgB, se deduce que # fA = # B. Y como # fa = # A, se concluye que # A = # B.

Ejercicios.

18. Siendo Q+ = {x $\in$ Q | x > 0, demostrar que:

   a) f : Q+ $\rightarrow$ N : $\dfrac{m}{n} \rightarrow 2^m \cdot 3^n$ $\left(\dfrac{m}{n}\right.$ forma irreducible$\left.\right)$ es una inyección.

   b) g : N $\rightarrow$ Q+ : $x \rightarrow x + 1$ es una inyección.

   c) # Q+ = # N.

   d) # Q = # Z = # N.

19. No existe ninguna inyección de R en N.

El símbolo $<$ hay que interpretarlo así:
$\# A < \# B$ quiere decir que existe una inyección de A en B, pero no existe una inyección de B en A.

Así, por ejemplo, $\# N < \# R$.

Por el momento sólo conocemos dos clases de conjuntos infinitos: La clase de los conjuntos, que son equipotentes a N (conjuntos *numerables*), y la clase de los conjuntos equipotentes a R (conjuntos que tienen la *potencia del continuo*).

¿Hay conjuntos que no son equipotentes ni a N ni a R?

La respuesta afirmativa nos la da el siguiente

Teorema 4 (de CANTOR).

Para cualquier conjunto A, se verifica: $\# A < \# P(A)$

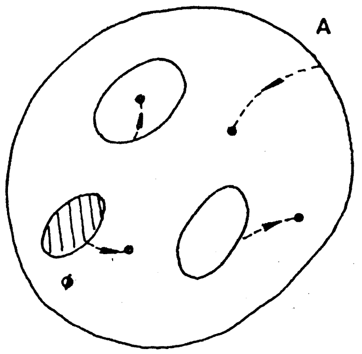
Demostración. Sea A un conjunto y P(A) el conjunto de sus partes Es claro que existe una inyección de A en P(A), a saber:

$$x \to \{x\}$$

Vamos a probar que no puede existir una inyección

$$f : P(A) \to A$$

Si existiera f:



(El mismo diagrama sirve para representar A y P(A))

consideraríamos el conjunto de elementos x de A, tales que $x \notin f^{-1}(x)$:
$B = \{x \in A | x \notin f^{-1}(x)\}$ (aquí se utiliza la inyectividad: $f^{-1}(x)$ único)

Supongamos que $f(B) = b$ $(f^{-1}(b) = B$, por la inyectividad de $f)$.

Ahora bien:

Si $b \in B$, entonces $b \notin B$.

Si $b \notin B$, entonces $b \in B$.

Ambas posibilidades son contradictorias.

Consecuencia: Tenemos una receta para fabricar conjuntos infinitos cada vez más potentes:

$$N, P(N), PP(N), \ldots$$

10. La hipótesis del continuo.

Aplicando el teorema de CANTOR a las sucesiones

$$N, P(N), PP(N), \ldots$$
$$R, P(R), PP(R), \ldots$$

obtenemos las cadenas

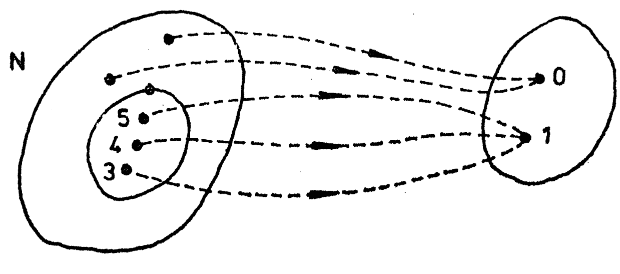
$$\# N < \# P(N) < \# PP(N)$$
$$\# R < \# P(R) < \# PP(R)$$

El próximo teorema demuestra que la segunda cadena está incluida en la primera, ya que $\# P(N) = \# R$.

Teorema 5.

El conjunto de las partes de N es equipotente a R.

Demostración.



A cada parte de N le podemos hacer corresponder su función característica. Recíprocamente, a cada función de N en $\{0,1\}$ hacemos corresponder una parte de N. (Las funciones características, en este caso, son sucesiones formadas exclusivamente por ceros y unos.)

$$
\begin{array}{ll}
\{3, 4, 5\} & \to 000111000000\ldots\ldots \\
\emptyset & \to 000000000000\ldots\ldots \\
P & \to 101010101010\ldots\ldots \\
I & \to 010101010101\ldots\ldots \\
N & \to 111111111111\ldots\ldots
\end{array}
$$

Sea A el conjunto de sucesiones formadas exclusivamente por 0 y 1. Acabamos de ver que $\# P(N) = \# A$.

Sea B la parte de A formada por todas las sucesiones con un número infinito de ceros. A—B será el conjunto de sucesiones que «terminan» con infinitos unos.

Sea f un elemento cualquiera de A : $f = t_1 t_2 t_3 \ldots.$

La aplicación

$$
\begin{array}{l}
g : A \to R \\
f \to \begin{cases} 0,\ t_1 t_2 t_3 \ldots\ldots, & \text{si } f \in B \\ 1,\ t_1 t_2 t_3 \ldots\ldots, & \text{si } f \in A—B \end{cases}
\end{array}
$$

que hace corresponder a cada sucesión de A un número real escrito en el sistema binario de numeración, es inyectiva. (Con esta definición de g se evita que dos sucesiones distintas den origen a un mismo número real.)

Por ser g una aplicación inyectiva, tenemos que

$$\# A = \# g(A)$$

También se cumple que

$$]0, 1[\subset g(A) \subset R$$

y teniendo en cuenta la proposición 6, deducimos que

$$\# R = \# g(A)$$

Luego, $\# R = \# P(N)$.

Fue CANTOR quien se hizo esta pregunta:

¿Existe algún conjunto infinito de cardinal comprendido entre $\# N$ y $\# R$? CANTOR conjeturó que no existía tal conjunto (*hipótesis del continuo*), pero no lo pudo demostrar.

COHEN demostró, en 1962, la *indecidibilidad* de la hipótesis del continuo.

BIBLIOGRAFIA

PAPY: *Matemática moderna I.*

KOLMOGOROV: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.*

KURATOWSKI: *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología.*