SOBRE LAS OPERACIONES ARITMETICAS DE CUARTO ORDEN

por

GIUSEPPE ARCIDIACONO (Roma)

1. INTRODUCCIÓN.

Como es bien sabido, en Aritmética las operaciones de primer orden son la *adición* y la *sustracción*, las operaciones de 2.º orden son la *multiplicación* y la *división*, mientras que las de tercer orden son la elevación a *potencia*, la extracción de la *raiz* y la extracción del *logaritmo*. En una memoria de 1953, publicada en la revista *Collectanea Mathematica* (1), he desarrollado una teoría general de las operaciones de orden n. De esa teoría, para $n = 4$, obtenemos las operaciones de 4.º orden y sus propiedades. Las operaciones de cuarto orden se definen así:

La elevación a la *hiperpotencia* viene dada por

$$\overline{a}|^{1+b} = (\ldots (a^a)^a \ldots)^a = a^{a^b} \qquad [1,1]$$

donde el número (real o complejo) a viene elevado a sí mismo b veces (con b número natural). En particular, el hipercuadrado de un número viene dado por $\overline{a}|^2 = a^a$, y se tiene, por ejemplo,

$$\overline{\pi}|^2 = 36{,}46215.. ;\ \overline{e}|^2 = 15{,}15426.. ;\ \overline{1/e}|^2 = 0{,}69220.. \qquad [1,2]$$

La definición [1,1] puede ser extendida también al caso en que el número b es un número complejo. Se tiene, pues,

$$\overline{a}|^0 = \sqrt[a]{a} ;\ \overline{a}|^1 = a ;\ \overline{a}|^{-1} = a^{1/a^2} \qquad [1,3]$$

La *hiperraiz* de índice b del número a viene definida así:

$$\sqrt[b]{\overline{a}} = c \text{ si se tiene } \overline{c}|^b = a. \qquad [1,4]$$

Por fin, para el *hiperlogaritmo* en base b del número a, tendremos

$$\mathrm{LOG}_b\, a = c \text{ si se tiene } \overline{b}|^c = a. \qquad [1,5]$$

Un estudio sistemático de las propiedades de las operaciones aritméticas de cuarto orden, hecho en la memoria precedente, lleva a la interesante conclusión de que la *hiperraiz de índice cualquiera puede reducirse siempre a la hiperraiz cuadrada,* según la simple fórmula

$$\boxed{\sqrt[1+m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt{a^m}}} \qquad [1,6]$$

De modo análogo, el *hiperlogaritmo se puede reducir al logaritmo,* porque se tiene la propiedad

$$\boxed{\mathrm{LOG}_b\, a = \log_b \log_b a + 1} \qquad [1,7]$$

Se sigue de lo anterior, que la única operación de cuarto orden no reducible a la misma de tercer orden, es la *hiperraiz cuadrada* así definida

$$\sqrt{a} = b \text{ si se tiene } b^b = a. \qquad [1,8]$$

En este trabajo nos proponemos profundizar en el estudio de las operaciones de cuarto orden, en el campo complejo, con especial referencia a la extracción de la hiperraíz cuadrada. Examinaremos, pues, algún nuevo tipo de ecuación que puede ser resuelto utilizando las operaciones aritméticas de cuarto orden.

2. Nuevas propiedades de las operaciones de cuarto orden.

En la memoria precedente habíamos establecido toda una serie de propiedades de las operaciones de cuarto orden. Ahora estableceremos alguna otra, que podrá ser demostrada utilizando las definiciones dadas en el número 1.

La raíz de índice m y la hiperpotencia están ligadas por la relación

$$\sqrt[m]{\overline{a}|^{1+k}} = \overline{\sqrt[m]{a}}\,\Big|^{1+km} \qquad [2,1]$$

la cual permite cambiar el orden de las dos operaciones.

A su vez, la hiperraíz de índice $1 + m$ está ligada a la raíz de índice k por la relación

$$\left(\sqrt[1+m]{\sqrt[k]{a}}\right)^m = \sqrt{\sqrt[k]{a^m}} \qquad [2,2]$$

Es interesante observar que la hiperraíz cuadrada puede ser escrita bajo forma de potencia, o bien de hiperpotencia del siguiente modo

$$\sqrt{a} = a^{1/\sqrt{a}} = \overline{a}|^{1-1/\sqrt{a}} \qquad [2,3]$$

Sabemos que la operación logaritmo reduce la raíz de índice n a una división por n. Esto no sucede, sin embargo, para la hiperraíz cuadrada, que no puede se reducida a operaciones más simples. Se tiene, en efecto,

$$\log \sqrt{\overline{a}} = \log a/\sqrt{\overline{a}} \cdot \log_a \sqrt{\overline{a}} = 1/\sqrt{\overline{a}} \qquad [2,4]$$

Tampoco el hiperlogaritmo consigue reducir la hiperraíz cuadrada a operaciones más simples, porque, en virtud de la (3) se tiene

$$\mathrm{LOG}_a \sqrt{\overline{a}} = 1 - 1/\sqrt{\overline{a}} \qquad [2,5]$$

A su vez, la hiperpotencia es reducible, porque

$$\mathrm{LOG}\,(\bar{a}|^{1+m}) = \mathrm{LOG}\, a + m \log a \qquad [2,6]$$

Vale, por fin, la interesante propiedad

$$\mathrm{LOG} \sqrt[m]{a^k} = \mathrm{LOG}\, a - \log m + \log k \qquad [2,7]$$

como es fácil verificar.

3. Problemas que plantea la hiperraiz cuadrada.

Sabemos que, en Aritmética, la introducción de las operaciones inversas ha llevado a sucesivas ampliaciones del campo de los números (2). Así, la sustracción ha llevado a la introducción de los *números negativos*, los *números racionales* derivan del estudio de la división, mientras que la extracción de la raíz ha llevado a la introducción de los *números irracionales* y de los *números complejos*. Podría pensarse que el estudio de la hiperraíz cuadrada conducirá a nuevos tipos de números, además de los complejos. De hecho esto no es posible, según el clásico resultado de Weierstrass, si se quieren conservar las propiedades formales del Algebra (3).

Por tal motivo, el estudio de la hiperraíz cuadrada se presenta particularmente interesante, porque supera el problema de ver bajo qué condiciones existe la hiperraíz cuadrada de un número complejo, en el campo complejo y cuantos valores admite Si nos limitamos al caso de la hiperraíz cuadrada de un número real positivo a hemos visto ya que admite un único valor real para $a > 1$, mientras que admite dos valores reales para

$$\overline{1/e}|^{2} \leqslant a \leqslant 1 \qquad [3,1]$$

es decir,

$$0{,}69220.. \leqslant a \leqslant 1$$

A su vez, para $0 < a < 0{,}69220..$ no existe solución en el campo real.

Si nos limitamos al caso (1), queremos establecer cómo están relacionados entre sí los dos valores (x, y) de la $\sqrt{a}$. A tal objeto pongamos

$$\alpha = 1/a \; ; \; \xi = 1/x \; ; \; \eta = 1/y \qquad [3,2]$$

Es fácil verificar que *los dos números* (ξ, η) son *permutables respecto a la elevación a potencia e hiperpotencia*, es decir, se tiene

$$\boxed{\xi^{\eta} = \eta^{\xi} \; ; \; \overline{\xi|}^{\eta} = \overline{\eta|}^{\xi}} \qquad [3,3]$$

Por consiguiente, si ponemos $\eta = \gamma\,\xi$ y sustituimos en la primera de las igualdades (3) obtendremos que los dos números (ξ, η) pueden ser expresados en función del parámetro γ, del siguiente modo

$$\xi = \sqrt[\gamma-1]{\gamma} \; ; \; \eta = \gamma \sqrt[\gamma-1]{\gamma} \qquad [3,4]$$

Llegaremos a un resultado más interesante si cambiamos el parámetro γ por el parámetro n, así definido $\gamma = 1 + 1/n$. Ahora se tendrá, en virtud de (4),

$$\boxed{\xi = (1 + 1/n)^{n} \; ; \; \eta = (1 + 1/n)^{n+1}} \qquad [3,5]$$

De ahí se sigue que para $n = 1$ se obtienen los dos números ($\xi = 2$; $\eta = 4$) que satisfacen las (3), para $n = 2$ se tienen los dos números ($\xi = {}^{9}/_{4}$; $\eta = {}^{27}/_{8}$), mientras que para n, teniendo a infinito, se tiene $\xi = \eta = e$.

Es interesante observar que para $n = -\frac{1}{2}$, obtenemos los dos números complejos ($\xi = -i$; $\eta = +i$) que satisfacen a las (3). De donde se tiene

$$\sqrt{\exp(-\pi/_{2})} = \pm i \qquad [3,6]$$

es decir,

$$\sqrt{0{,}2078795..} = \pm i$$

Por tanto, si existe la hiperraíz cuadrada de un número real positivo a, en el campo complejo tendrá, por lo menos, los dos valores

$$\sqrt{a} = \alpha + i\beta \; ; \; \sqrt{a} = \alpha - i\beta$$

De ahí se sigue que los dos números (ξ, η) serán siempre complejos conjugados, es decir,

$$(1 + 1/n)^{-n} = \alpha + i\beta \; ; \; (1 + 1/n)^{-n-1} = \alpha - i\beta$$

dividiendo miembro a miembro y poniendo $k = \alpha/\beta$ se tiene $1 + 1/n = {}^{(k+i)}/_{(k-i)}$ y entonces el número n debe ser necesariamente del tipo

$$n = -(1 + k\,i)/2 \qquad [3,7]$$

En particular, para $k = 0$, se tiene $n = -\frac{1}{2}$ y de aquí, $\xi = -i$; $\eta = +i$.

4. Extracción de la hiperraiz cuadrada de un número complejo en el campo complejo.

Sabemos ya que para calcular la raíz cuadrada de un número complejo $a + i\,b$, en el campo complejo, se pone

$$\sqrt{a + i\,b} = x + i\,y \qquad [4.1]$$

Elevando al cuadrado los dos miembros y separando la parte real y la parte imaginaria, los dos números reales (x, y) se obtienen resolviendo el sistema algebraico

$$x^2 - y^2 = a \; ; \; 2\,xy = b \qquad [4,2]$$

Se puede proceder de modo similar para extraer la hiperraíz cuadrada de un número complejo. Distinguiremos tres casos:

Primer caso: Si la hiperraíz cuadrada del número complejo $a + ib$ existe en el campo complejo y viene dada por $x + i\,y$ debera tenerse

$$\sqrt{\overline{\overline{a + ib}}} = x + iy \qquad [4,3]$$

Elevando al hipercuadrado los dos miembros y tomando logaritmos, obtenemos la ecuación en las dos incógnitas (x, y)

$$(x + iy) \log (x + iy) = \log (a + ib)$$

o bien, explicitando el logaritmo (4)

$$(x + iy)\,[\log \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} (y/x)] = \log \sqrt{a^2 + b^2} + i \operatorname{arctg} (b/a)$$

Separando las partes real e imaginaria, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en las dos incógnitas (x, y)

$$\left\{ \begin{array}{l} x \log \sqrt{x^2 + y^2} - y \operatorname{arctg} (y/x) = \log \sqrt{a^2 + b^2} \\ y \log \sqrt{x^2 + y^2} + x \operatorname{arctg} (y/x) = \operatorname{arctg} (b/a) \end{array} \right. \qquad [4,4]$$

Este sistema puede simplificarse si introducimos las nuevas incógnitas

$$\mathrm{X} = \log \sqrt{x^2 + y^2} \; ; \; \mathrm{Y} = \operatorname{arctg} (y/x) \qquad [4,5]$$

De ahí se sigue inmediatamente que

$$x^2 + y^2 = e^{2\mathrm{X}} ; \; y = x \operatorname{tg} \mathrm{Y}$$

de donde se deduce

$$x = e^{\mathrm{X}} \cos \mathrm{Y} \; ; \; y = e^{\mathrm{X}} \operatorname{sen} \mathrm{Y} \qquad [4,6]$$

Ahora, si ponemos

$$A = \log \sqrt{a^2 + b^2} \; ; \; B = \operatorname{arctg} (b/a) \qquad [4,7]$$

el sistema (4) se reduce a este sistema más simple

$$\boxed{\begin{aligned} X\, e^X &= B \operatorname{sen} Y + A \cos Y \\ Y\, e^X &= B \cos Y - A \operatorname{sen} Y \end{aligned}} \qquad [4,8]$$

En el caso particular de la hiperraíz cuadrada de un número real, se tiene $b = 0$, y de ahí, $A = \log a$, $B = 0$. El sistema (8) se escribe ahora

$$X\, e^X = A \cos Y \; ; \; Y\, e^X = - A \operatorname{sen} Y \qquad [4,9]$$

La segunda ecuación admite la solución $Y = 0$, y ahora la primera ecuación se reduce a la siguiente

$$X\, e^X = \log a \qquad [4.10]$$

Esta ecuación se puede escribir así, $\overline{e^X}|^2 = a$, de donde $X = \log \sqrt{a}$, y por fin $x = \sqrt{a}$.

Segundo caso: Se alcanza un resultado más simple si se quiere extraer la hiperraíz cuadrada de $\exp(a + ib)$. Basta poner

$$\sqrt{\exp(a + ib)} = \exp(x + iy) \qquad [4.11]$$

Elevando los dos miembros al hipercuadrado y separando la parte real y la parte imaginaria, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} e^x\, (x \cos y - y \operatorname{sen} y) &= a \\ e^x\, (x \operatorname{sen} y + y \cos y) &= b \end{aligned}} \qquad [4.12]$$

En el caso particular en el que $x = 0$ e $y = \theta$ de las [11] y [12] se deduce la interesante fórmula

$$\sqrt{\exp [i\, \theta\, (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]} = \exp (i\theta) \qquad [4.13]$$

lo cual, para $\theta = \pi/2$ se reduce a la [3,6].

Si nos referimos a la hiperraíz cuadrada de un número real, se tiene $b = 0$, y la segunda ecuación [12] admite la solución $y = 0$. En consecuencia, la primera ecuación se reduce a la siguiente

$$x\, e^x = a \qquad [4.14]$$

de la que se sigue que

$$x = \log \sqrt{e^a} = a/\sqrt{e^a}$$

Tercer caso: Por último, examinamos el caso en que se quiere calcular la hiperraíz cuadrada del número complejo

$$\overline{e}|^{1+a+ib} = \mathrm{EXP}\,(a + ib) \qquad [4.15]$$

Bastará poner

$$\sqrt{\mathrm{EXP}\,(a + ib)} = \mathrm{EXP}\,(x + iy) \qquad [4.16]$$

Procediendo al modo acostumbrado, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\boxed{x + e^x \cos y = a \;;\; y + e^x \operatorname{sen} y = b} \qquad [4.17]$$

También en este caso, si ponemos $x = \log k$, $y = v$, podemos obtener la interesante fórmula

$$\sqrt{\mathrm{EXP}\,[(\log k + k \cos v) + i\,(v + k \operatorname{sen} v)]} = \mathrm{EXP}\,(\log k + v\,i) \qquad [.418]$$

la cual, para $k = 1$, se reduce a la siguiente igualdad

$$\sqrt{\mathrm{EXP}\,[\cos v + i\,(v + \operatorname{sen} v)]} = \mathrm{EXP}\,(v\,i) \qquad [4.19]$$

y para $v = \pi$ nos da

$$\sqrt{\mathrm{EXP}\,(-1 + \pi i)} = \mathrm{EXP}\,(\pi i) = 1/e = 0.36787944.. \qquad [4.20]$$

En el caso de la hiperraíz cuadrada de un número real se tiene $b = 0$, y la segunda ecuación [17] admite la solución $y = 0$. De ahí la primera ecuación se reduce a la siguiente

$$x + e^x = a \qquad [4.21]$$

la cual admite la solución $x = a - \log \sqrt{\mathrm{EXP}(a)}$ (ver núm. 5).

5. Ecuaciones resolubles con las operaciones de cuarto orden.

En el trabajo precedente [1] examinamos algunas ecuaciones resolubles utilizando oportunamente las operaciones aritméticas de cuarto orden. Aquí nos proponemos completar los resultados obtenidos.

a) Dada la ecuación

$$\boxed{x + k\,a^x = b} \qquad [5.1]$$

Observaremos, para resolverla, que vale la siguiente propiedad

$$\overline{\overline{a}|^{1+x}}|^{1+k} = \overline{a}|^{1+x+ka^x} \qquad [5.2]$$

Se sigue de lo anterior que la [1] se puede escribir así

$$\overline{\overline{a}|^{1+x}}|^{1+k} = \overline{a}|^{1+b}$$

de donde se obtiene inmediatamente la solución

$$x = \mathrm{LOG}_a \sqrt[1+k]{\overline{a}|^{1+b}} - 1 \qquad [5.3]$$

en la cual intervienen las tres operaciones de cuarto orden. Esa misma ecuación puede ser resuelta de otro modo, observando que se puede escribir así $(b - x)\, a^{-x} = k$, o bien $(b - x)\, a^{b-x} = k\, a^b$. De ahí deducimos que $\overline{a^{b-x}}|^2 = a^{ka^b}$ es decir,

$$b - x = \log_a \sqrt{a^{ka^b}}$$

De ahí se obtiene la solución

$$x = b - k\, a^b : \sqrt{a^{ka^b}} \qquad [5.4]$$

Comparando la [3] con la [4], tenemos la interesante identidad

$$\boxed{\mathrm{LOG}_a \sqrt[1+k]{\overline{a}|^{1+b}} = (1 + b) - k\, a^b : \sqrt{a^{ka^b}}} \qquad [5.5]$$

que generaliza la [2.5] y a la cual se reduce para $k = 1$ y $b = 0$.

b) Si se quiere resolver la ecuación

$$\boxed{(a + b/x)^{kx} = c} \qquad [5.6]$$

con $x \neq 0$ basta poner $y = 1/x$ y nos queda reducida a la ecuación $a + by = c^{y/k}$, que es del tipo [1].

En el caso particular en que $a = 1$, esa ecuación admite la solución $y = 0$, y de ahí la [6] es imposible, a menos que la hiperraíz cuadrada que interviene en su solución admita más de un valor.

c) Si queremos encontrar el número x que sea permutable con el número a, respecto a la elevación a potencia, deberemos resolver la ecuación $a^x = x^a$. Esta ecuación se puede escribir así: $x - a^{x/a} = 0$; por tanto, es del tipo [1] y admite la solución trivial $x = a$, a menos que la hiperraíz cuadrada, que interviene en la solución, admita más de un valor.

d) *Ecuaciones hiperradicales.* Las ecuaciones en las cuales la incógnita figura bajo la hiperraíz cuadrada, se resuelven poniendo $x = yy$. Hagamos algún ejemplo:

1). $$x\, a^{\sqrt{x}} = b$$

se puede escribir así: $\overline{ay}|^2 = b^a$, que nos da la solución

$$y = \sqrt{b^a}\,/a$$

y de ahí se obtiene x.

2).
$$\log x + \sqrt{x} = a$$

Pasando a exponencial tendremos

$$x\, e^{\sqrt{x}} = e^a$$

que es del tipo precedente.

3).
$$x^{k\sqrt{x}} = a$$

equivale a la ecuación

$$\overline{y}|^3 = \sqrt[k]{a}$$

y de ahí se tiene la solución

$$y = \sqrt[3]{\sqrt[k]{a}}$$

de la cual se deduce x.

4).
$$k\sqrt{x} = \log x$$

pasando a exponencial tendremos

$$x = e^{k\sqrt{x}},$$

y de aquí se sigue $(y/e^k)^y = 1$, de donde $y = e^k$.

5).
$$x^{\sqrt{a}} \cdot a^{\sqrt{x}} = b$$

se puede escribir así

$$\overline{y\sqrt{a}}|^2 = b$$

y de ahí se sigue que

$$y = \sqrt{b}\;/\sqrt{a}\,.$$

e) Para resolver la ecuación

$$\boxed{\overline{x}|^{(1+m)} + nx^m = a} \qquad [5.7]$$

observemos que pueda escribirse del siguiente modo

$$\overline{\overline{x}|^{1+m}}|^{1+n} = a$$

y de ahí se obtiene inmediatamente la solución

$$x = \sqrt[1+m]{\sqrt[1+n]{a}} \qquad [5.8]$$

En particular, para $m = n = 1$, se tiene la ecuación

$$\overline{x|}^{x+2} = a \qquad [5.9]$$

que admite la solución

$$x = \sqrt{\sqrt{a}}$$

Vemos, pues, como las operaciones aritméticas de cuarto orden nos permiten resolver analíticamente algunos tipos interesantes de ecuaciones. El estudio sistemático de la hiperraíz cuadrada, en el campo complejo, se revela por tanto de particular utilidad, y puede llevar a la introducción de los números «hiper-algebraicos», que generalizan a los números algebraicos, lo que permite una mejor comprensión del campo, todavía poco estudiado, de los números trascendentes [5].

BIBLIOGRAFIA

1. G. Arcidiacono: «Sulla extensione delle operazioni aritmetiche», *Coll. Math.*, VI, 91-106 (1953).

2. G. Arcidiacono: *Aritmetica*, Massimo, Milán, 1965; *Algebra*, Massimo, 1966.

3. F. Enriques: *Questioni sulle matematiche elementari*, articula de Gigli, parte 1.ª, vol. II.

4. G. Bagnera: *Lezioni di calcolo infinitesimale*, Palermo, 1924, página 102.

5. Sobre las operaciones de cuarto orden se encuentran los siguientes trabajos: G. Eisensten, *J. Reine angew. Math.*, **28**, 49 (1844); F. Woepcke, *J. Reine angew. Math.*, **42**, 83 (1851); H. Gerlach, *Zeits. Math. Naturw. Untericht.*, **13**, 423 (1882); F. Schulze, *Archiv. der Math. Phys* (2), **3**, 302 (1886); L. G. Pasquier, *Association Françoise*, **52**, pp. 31 e 34 (1928).