UNA NOTA SOBRE TEOREMAS DE CONVERGENCIAS

por

F. SAIZ ZALDO

Notaciones: Sea f una función real definida en el intervalo $[a, \infty)$ integrable Riemann en $[a, b]$ para cualquier $b \geqslant a$.

Denotaremos por

$$\int_a^{\to\infty} f(x)\, dx$$

la integral impropia de f en $[a, \infty)$, es decir, el límite en el caso que exista

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Preliminares: Es conocido el siguiente resultado, equivalente al teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para integrales impropias:

«Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

una sucesión de funciones reales, definidas en el intervalo $[a, \infty)$, que converge puntualmente hacia una función f en $[a, \infty)$. Supongamos que f_n y f son integrables Riemann en cada intervalo $[a, b]$, $b \geqslant a$ para $n = 1, 2, \ldots$ y que existe una función g para la cual existe

$$\int_a^{\to\infty} g(x)\, dx$$

y tal que $|f_n| \leqslant g$, $n = 1, 2, \ldots$

En estas condiciones:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{\overrightarrow{\infty}} f_n(x)\, dx = \int_a^{\overrightarrow{\infty}} f(x)\, dx''$$

Para una demostración del teorema, ver referencias (3) y (4).

La condición de dominar las f_n, mediante la función g, es una condición muy fuerte. Obsérvese el siguiente ejemplo para el cual la tesis es cierta y, sin embargo, no se puede dominar las funciones de partida mediante una función integrable en el sentido impropio.

Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

la sucesión de funciones definidas en $[0, \infty)$ por

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \chi_{[k,\, k+1)}$$

Dichas funciones son integrables en cada intervalo $[a, b)$ para $b > 1$. La función límite

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

admite integral impropia en $[0, \infty)$ y

$$\int_0^{\overrightarrow{\infty}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte

$$\int_0^{\overrightarrow{\infty}} f_n(x) dx = \int_0^{n+1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

con lo que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\overrightarrow{\infty}} f_n(x) dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^{n+1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{\overrightarrow{\infty}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

y la tesis del teorema es cierta; pero, sin embargo, no existe ninguna función g para la cual exista

$$\int_0^{\to\infty} g(x)\,dx$$

verificando $|f_n| \leqslant g$ para $n = 1, 2, \ldots$, pues, de lo contrario, existiría

$$\int_0^{\to\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx$$

y al ser

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$$

positiva dicha función sería integrable Lebesgue, lo cual no es cierto.

Queremos dar una condición más débil, para la cual sea cierto el resultado del teorema; aunque no se pueda dar una dominación de las f_n.

Es también conocido el siguiente resultado. Ver referencia (2). «Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

una sucesión no decreciente de funciones Riemann integrables en $[a, b]$ que converjan puntualmente hacia una función f del mismo tipo. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx''$$

Apostol, referencia [1], nos da el siguiénte resultado: «Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

una sucesión de funciones positivas en $[a, \infty)$ integrables en el sentido de Riemann en cada intervalo $[a, b]$, $b \geqslant a$ y tales que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx \text{ para } b \geqslant a$$

Entonces

$$\int_a^{\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\to\infty} f_n(x)dx$$

siempre que uno de los dos miembros de esta igualdad tenga sentido.»

A partir de aquí es fácil demostrar el siguiente resultado:
Proposición 1. «Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

una sucesión de funciones no negativas definidas en $[a, \infty)$. Tales que $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_n \leqslant \ldots$ Supongamos que dichas funciones, y su límite puntual f, son integrables Riemann en $[a, b]$ $\forall b \geqslant a$. Si, además, existen las integrales

$$\int_a^{\vec{\infty}} f_n(x)dx$$

y una constante C que mayor a dichas integrales, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{\vec{\infty}} f_n(x)dx = \int_a^{\vec{\infty}} f(x)dx''$$

En efecto, la sucesión de funciones

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$$

dadas por

$$g_1 = f_1 \text{ y } g_n = f_n - f_{n-1} \text{ para } n > 1$$

son tales que existen las integrales

$$\int_a^{\vec{\infty}} g_n(x)dx$$

son funciones positivas, y

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Pero

$$\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b g_k(x)dx$$

con lo que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b g_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx$$

Por lo tanto, en virtud de la nota anterior, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\overrightarrow{\infty}} g_n(x)dx$$

es convergente al ser

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^{\overrightarrow{\infty}} g_k(x)dx = \int_a^{\overrightarrow{\infty}} f_n(x)dx \leqslant C$$

se tiene que

$$\int_a^{\overrightarrow{\infty}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\overrightarrow{\infty}} g_n(x)dx$$

es decir

$$\int_a^{\overrightarrow{\infty}} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^{\overrightarrow{\infty}} g_k(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^{\overrightarrow{\infty}} f_n(x)dx$$

Pasemos a la demostración del teorema anunciado sustituyendo por una condición más débil la clásica del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Proposición 2. «Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

una sucesión de funciones reales, definidas en $[a, \infty)$ integrables Riemann en $[a, b]$ $\forall b \geqslant a$ tal que su límite puntual es integrable en $[a, b]$ para $b \geqslant a$.

Supongamos que existe una sucesión de funciones

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$$

definidas en $[a, \infty)$ que converge puntualmente hacia g en $[a, \infty)$ y verificando que existen

$$\int_a^{\overrightarrow{\infty}} g_n(x)dx \text{ y } \int_a^{\overrightarrow{\infty}} g(x)dx$$

$$|f_n| \leqslant g_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int_a^{\vec{\infty}} g_n(x)dx = \int_a^{\vec{\infty}} g(x)dx$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{\vec{\infty}} f_n(x)dx = \int_a^{\vec{\infty}} f(x)dx$$

En efecto, como $|f| \leqslant g$ y existe

$$\int_a^{\vec{\infty}} g(x)dx$$

también existe

$$\int_a^{\vec{\infty}} f(x)dx$$

Análogamente existen las integrales

$$\int_a^{\vec{\infty}} f_n(x)dx$$

Sean ahora las funciones $\psi_n = f_n + g_n$ para las cuales existen

$$\int_a^{\vec{\infty}} \psi_n(x)dx$$

Además, $\psi_n \geqslant 0$. La sucesión de funciones

$$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$$

dadas por

$$h_n = \sup (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

es no decreciente, positiva y $h_n \in R[a, b]$ para $b \geqslant a$ y su límite $f + g$ es integrable en $[a, b]$.

Además

$$\int_a^{\vec{\infty}} h_n(x)dx \leqslant \int_a^{\vec{\infty}} [f(x) + g(x)]\, dx$$

Por la proposición 1

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{\vec{\infty}} h_n(x)dx = \int_a^{\vec{\infty}} [f(x) + g(x)]dx$$

Por otra parte, $\psi_k \leqslant h_n$ para $k = 1, \ldots, n$, con lo que

$$\int_a^{\vec{\infty}} \psi_k(x)dx \leqslant \int_a^{\vec{\infty}} h_n(x)dx \text{ para } k = 1, \ldots, n$$

y

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_a^{\vec{\infty}} \psi_k(x)dx \leqslant \int_a^{\vec{\infty}} h_n(x)dx$$

es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \sup \int_a^{\vec{\infty}} \psi_n(x)dx \leqslant \int_a^{\vec{\infty}} [f(x) + g(x)]\, dx$$

Haciendo un razonamiento análogo para las funciones $\Phi_n = g_n - f_n$ se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \inf \int_a^{\vec{\infty}} \Phi_n(x)dx \geqslant \int_a^{\vec{\infty}} [g(x) - f(x)]\, dx$$

Tenemos las relaciones

$$\lim_{n \to \infty} \sup \int_a^{\vec{\infty}} [f_n(x) + g_n(x)]\, dx \leqslant \int_a^{\vec{\infty}} [f(x) + g(x)]\, dx$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \inf \int_a^{\vec{\infty}} [g_n(x) - f_n(x)]\, dx \geqslant \int_a^{\vec{\infty}} [g(x) - f(x)]\, dx$$

Ahora bien, como por hipótesis se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} g_n(x)dx = \overrightarrow{\int_a^{\infty}} g(x)dx$$

y las relaciones

$$\limsup_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} [f_n(x) + g_n(x)]\, dx = \limsup_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f_n(x)\, dx + \lim_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} g_n(x)dx$$

$$\liminf_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} [g_n(x) - f_n(x)]\, dx = \lim_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} g_n(x)\, dx - \liminf_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f_n(x)dx$$

son ciertas, se tiene que

$$\limsup_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f_n(x)dx \leqslant \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f(x)dx$$

y

$$\liminf_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f_n(x)dx \geqslant \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f(x)dx$$

de donde el resultado del teorema.

Corolario 1. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue es cierto.

Basta tomar $g_n = g$ y el resultado es inmediato.

Corolario 2. «Sea

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

una sucesión de funciones no negativas en $[a, \infty]$ integrables en el sentido de Riemann en $[a, b]$ para $b \geqslant a$ y tales que su límite puntual f sea del mismo tipo.

Es condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f_n(x)dx = \overrightarrow{\int_a^{\infty}} f(x)dx$$

que existe una sucesión de funciones

$$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$$

tales que

$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{\int_a^{\infty}} g_n(x)dx = \overrightarrow{\int_a^{\infty}} \lim_{n \to \infty} g_n(x)dx$$

y tales que $f_n \leqslant g_n$.

En efecto, la condición es suficiente en virtud de la **proposición** 2 y es necesaria sin más que tomar $f_n = g_n$.

En el siguiente ejemplo vemos un caso donde el **teorema de la convergencia dominada** de Lebesgue no es aplicable, pero sí la **proposición** 2 [o el corolario 2].

Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \chi_{[n, n+1)} \text{ definida en } [1, \infty]$$

Trivialmente

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

$$\overrightarrow{\int_1^{\infty}} f_n(x)dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = ln \frac{n+1}{n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Sin embargo, no existe ninguna mayoración por una función g, tal que exista

$$\overrightarrow{\int_1^{\infty}} g(x)dx$$

pues entonces sería

$$g(x) \geqslant \frac{1}{x}$$

y existiría

$$\int_1^{\to\infty} \frac{dx}{x}$$

lo que es absurdo. Sin embargo

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{\to\infty} f_n(x)dx = 0 = \int_1^{\to\infty} f(x)dx$$

REFERENCIAS

1. **Apóstol**, T.: *Análisis Matemático.* Ed. Reverté. 1960.

2. **White**, A. J.: *Introducción al Análisis real.* Ediciones de Promoción de Cultura. 1973. Barcelona.

3. **Cunningham**, F.: *Math. Mag.*, vol. 40, 1967 (179-186).

4. **Kestelman**, H.: *Amer. Math. Monthly*, vol. 77, 1970 (182-187).