UNAS DESIGUALDADES PARA LAS INTEGRALES EULERIANAS

por

JUAN B. ROMERO MARQUEZ

1. Vamos a establecer algunas desigualdades en relación a las integrales Eulerianas Γ y B.

Lema 1. $\forall p \in \mathbf{R}$ y $p > 0$ y $\forall\, x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x^p \leqslant 1$.

Demostración. Sea $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = 1 - x^p$. Esta función es continua y diferenciable en $[0, 1]$. Además, $\varphi'(x) = -p\, x^{p-1}$ y $\forall\, x_0 \in [0,1]$, $\varphi'(x_0) = -p\, x_0^{p-1} < 0 \Longrightarrow \varphi$ es decreciente en $[0,1]$. De aquí $\forall\, x \in [0, 1]$, $\varphi(1) \leqslant \varphi(x) \Longrightarrow 0 \leqslant 1 - x^p \Longrightarrow x^p \leqslant 1$. $\forall\, x \in [0, 1]$.

Además, $0 \leqslant x^p \leqslant 1$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

Lema 2. $\forall\, p \in \mathbf{R}$ y $p > 0$ y $\forall\, x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x^{p+1} \leqslant x \leqslant 1$.

Demostración. Por lema 1, $\forall\, p \in \mathbf{R}$ y $p > 0$ y $\forall\, x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x^p \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x^{p+1} \leqslant x \leqslant 1$.

2. DESIGUALDAD PARA B.

PROP. 3. Si $p, q \in \mathbf{R}$ y $p > 0$, $q > 0$, entonces

$$B(p + 2, q + 2) \leqslant \frac{1}{6}$$

Demostración. $\forall\, x \in [0, 1]$ por lema 2, $0 \leqslant x^{p+1} \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant (1 - x)^{q+1} \leqslant 1 - x \leqslant 1 \Longrightarrow \forall\, x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x^{p+1}(1 - x)^{q+1} \leqslant$

$$\leqslant x(1 - x) \Longrightarrow B(p + 2, q + 2) = \int_0^1 x^{p+1}(1 - x)^{q+1}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 x(1 - x)\, dx = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

y el resultado se sigue.

COROLARIO 4.

a) Si $p = q \Longrightarrow B(p + 2, p + 2) \leqslant \dfrac{1}{6}$

b) Si $p + q = 1 \Longrightarrow \Gamma(p + 2)\,\Gamma(3 - p) \leqslant 4.$

c) Si $p = {}^1/_2 \Longrightarrow \Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right) \leqslant 2$

Demostración.

a) De prop. 3, haciendo $p = q \Longrightarrow B(p + 2, p + 2) \leqslant \dfrac{1}{6}$

b) Si $p > 0, q > 0$, con $p + q = 1 \Longrightarrow$ por prop. 3 que $B(p + 2, q + 2) \leqslant \dfrac{1}{6} \Longrightarrow \dfrac{\Gamma(p + 2)\,\Gamma(q + 2)}{\Gamma(5)} \leqslant \dfrac{1}{6} \Longrightarrow \Gamma(p + 2)\,\Gamma(3 - p) \leqslant \dfrac{4!}{6} = 4.$

c) Haciendo en *b*) $p = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \leqslant 4 \Longrightarrow \Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right) \leqslant 2.$

PROPOSICIÓN 5. Si $p, q \in \mathbf{R}$ y $p > 0$, $q > 0$, entonces

$$B(p, q) \leqslant \frac{1}{6}\,\frac{(p + q + 3)(p + q + 2)(p + q + 1)}{pq\,(p + 1)(q + 1)}$$

Demostración. Por prop. 3 sabemos que

$$B(p + 2, q + 2) \leqslant \frac{1}{6}.$$

Entonces, utilizando las propiedades de B, se tiene el resultado.

COROLARIO 6. Si $p, q \in \mathbf{R}$ y $p > 0$, $q > 0$, y $p + q = 1$, entonces

$$B(p, 1 - p) \leqslant \frac{1}{6}\,\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{p(1 - p)(p + 1)(2 - p)} = \frac{4}{p(1 - p^2)(2 - p)}$$

Demostración. Se sigue de la prop. 5, poniendo $p + q = 1$ y $q = 1 - p$.